# احتمال و فرآیندهایِ تصادفی

امیر آقامحمدی

استادِ فیزیکِ دانش‌گاهِ الزهرا

دانش‌گاهِ الزهرا

۱۴۰۱

https://staff.alzahra.ac.ir/aghamohammadi

https://www.youtube.com/channel/UCFGDlcj-NiSA_o4AeVtfkSg

| | |
|---|---|
| سرشناسه | : آقامحمدی، امیر، ۱۳۴۰ |
| عنوان | : احتمال و فرآیندهای تصادفی |
| مشخصات ظاهری | : مصور، جدول. |
| شابک | : |
| یادداشت | : پشت جلد به انگلیسی: Probability and stochastic processes |
| یادداشت | : کتاب‌نامه |
| یادداشت | : نمایه |
| موضوع | : علوم پایه |
| شناسه افزوده | : |
| رده‌بندی کنگره | : |

عنوان کتاب: احتمال و فرآیندهای تصادفی

تألیف: امیر آقامحمدی

ویراستار ادبی:

صفحه‌آرا: امیر آقامحمدی

تاریخ و نوبت چاپ:

شمارگان:

قیمت:

شابک:

قطع: وزیری

مسئولیت درستی مطالب به عهده نویسنده است.

تقدیم به همه آن‌هایی که می‌خواهند بیشتر بدانند...

# پیش‌گفتار

من تا کنون چندین بار درسِ احتمال و فرآیندهای تصادفی و یک بار هم فیزیکِ آماریِ غیرِتعادلی را در دانشگاهِ الزهرا تدریس کرده‌ام. در این مدت این درس‌نامه را برایِ این درس‌ها آماده و استفاده کردم. سئوال‌هایی که در امتحان‌هایِ این درس‌ها در دانشگاهِ الزهرا استفاده کرده‌ام به‌تدریج به مجموعهِ سئوال‌هایِ آخرِ هر فصلِ درس‌نامه اضافه شده است. سئوال‌هایی که در کلاسِ درس مطرح می‌شد باعث شد بعضی از بخش‌ها تکمیل و مواردی بیش‌تر تشریح شوند.

توجه داشته باشید که این درس‌نامه هنوز در شکلِ ابتدایی است. علاوه بر این‌که هنوز ناقص است، احتمالا اشکالاتی دارد.

امیر آقامحمدی

تهران، ۱۴۰۱

# فهرست مطالب

# ۱
# احتمال

## ۱.۱ مقدمه

وقتی می‌گوییم احتمالِ یک رویداد $p$ است، یعنی چه؟ وقتی یک سکه را می‌اندازیم ممکن است نتیجه شیر یا خط باشد. معمولاً گفته می‌شود احتمال هر کدام از این رویدادها $1/2$ است. این گزاره یعنی چه؟ آیا اگر ۱۰۰ بار سکه را پرتاب کنیم، حتماً پنجاه بار شیر می‌آید؟ آیا امکان ندارد در همه‌یِ ۱۰۰ پرتاب، نتیجه خط باشد؟ اگر چنین چیزی امکان دارد، معنی‌یِ دقیقِ احتمال چیست؟ چه‌طور احتمالِ یک روی‌داد را اندازه بگیریم؟ برایِ شروع لازم است ابتدا تعریفی کمّی و دقیق از احتمال داشته باشیم و سپس به سنجش آن بپردازیم. در موردِ سنجشِ احتمال بعداً دوباره بحث خواهیم کرد. فعلاً به سوالِ اول بپردازیم.

برایِ این که احتمال را تعریف کنیم، لازم است ابتدا مجموعه‌ی تمام روی‌دادهایِ محتمل را در نظر بگیریم. به مجموعه‌یِ تمامِ روی‌دادهایِ محتمل، مجموعه‌یِ مرجع می‌گوییم و آن را با $\mathbf{\Omega}$ نمایش می‌دهیم. البته از بینِ تمامِ روی‌دادهایِ محتمل در هر اندازه‌گیری، قاعدتاً یک نتیجه رخ می‌دهد. بنا بر این هر نتیجه‌یِ اندازه‌گیری زیرمجموعه‌ای از این مجموعه‌یِ مرجع است. مثلاً در انداختن یک سکه دو روی‌داد محتمل است، شیر $\{H\}$، یا خط $\{D\}$. و مجموعه‌یِ مرجعِ $\mathbf{\Omega}$ برایِ دو روی‌دادِ محتمل یعنی شیر آمدن یا خط آمدن است. یا مثلاً در دو بار انداختن

سکه، چهار روی‌داد محتمل است، دو شیر $A_1 := \{H,H\}$، دو خط $A_2 := \{D,D\}$، دفعه‌یِ اول شیر و دفعه دوم خط $A_3 := \{H,D\}$، و بالاخره دفعه‌یِ اول خط و دفعه‌یِ دوم شیر است $A_4 := \{D,H\}$. مجموعه‌یِ مرجع $\boldsymbol{\Omega} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ است. روی‌دادِ $\{A_3, A_4\}$، یعنی این که حتما یک شیر و یک خط آمده و ترتیبِ آن‌ها برای‌ِمان مهم نیست یا روی‌دادِ $\{A_1, A_3, A_4\}$، یعنی آن‌که حداقل یک‌بار شیر آمده است.

برایِ آن که بتوانیم احتمالِ یک روی‌داد را به دست آوریم باید بتوانیم به مجموعه‌یِ متناظر با آن روی‌داد، یک عدد یا اندازه نسبت دهیم. قبل از آن لازم است بدانیم که با مجموعه‌ها چه‌کارهایی می‌توانیم بکنیم. اجتماعِ دو مجموعه

$$A \cup B = \{\xi | \xi \in A \text{ or } \xi \in B\}, \tag{۱.۱}$$

اشتراکِ دو مجموعه

$$A \cap B = \{\xi | \xi \in A \text{ and } \xi \in B\}, \tag{۲.۱}$$

و نقیضِ $A$

$$\bar{A} = \{\xi | \xi \notin A\}. \tag{۳.۱}$$

مجموعه روی‌دادهایی که در $B$ هستند و در $A$ نیستند و با $B - A$ نمایش داده می‌شود.

$$B - A = \{\xi | \xi \notin A \text{ and } \xi \in B\}, \tag{۴.۱}$$

بنا بر این $(A - B) \cup (B - A)$ یعنی مجموعه روی‌دادهایی که فقط در $A$ یا فقط در $B$ هستند. مجموعه‌یِ تهی یعنی مجموعه‌ی روی‌دادهایِ غیرِ ممکن و با $\varnothing$ نمایش داده می‌شود. دو روی‌دادِ $A$ و $B$ متمایزند، اگر $A \cap B = \varnothing$. در این صورت این دو روی‌داد ناسازگارند یا به عبارتِ دیگر هم‌زمان رخ نمی‌دهند.

از دو مجموعه‌یِ $A$ و $B$ سه مجموعه‌یِ $(A - B), A \cap B, (B - A)$ را می‌توان ساخت که اتحادهایِ زیر بینِ آن‌ها برقرار است

$$(A - B) \cup (A \cap B) = A, \tag{۵.۱}$$

$$(A \cap B) \cup (B - A) = B, \tag{۶.۱}$$

$$(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B, \tag{۷.۱}$$

$$(A - B) \cap (A \cap B) = \varnothing, \tag{۸.۱}$$

$$(A - B) \cap (B - A) = \varnothing, \tag{۹.۱}$$

$$(A \cap B) \cap (B - A) = \varnothing. \tag{۱۰.۱}$$

قوانینِ دومورگان[۱] ــ این قوانین به صورتِ زیرند

$$\overline{(A \cup B)} = (\bar{A} \cap \bar{B}), \tag{۱۱.۱}$$

$$\overline{(A \cap B)} = (\bar{A} \cup \bar{B}). \tag{۱۲.۱}$$

## ۲.۱ اندازه، احتمال

برایِ تعریفِ احتمال لازم است به هر مجموعه یک اندازه نسبت دهیم. اندازه هر مجموعه تابعی است که به آن مجموعه یک عدد نسبت می‌دهد.

$$\boldsymbol{\mu} : \ A \to \boldsymbol{\mu}(A). \tag{۱۳.۱}$$

تابعِ اندازه باید این خواص را داشته باشد

$$\boldsymbol{\mu}(A) \geq 0, \tag{۱۴.۱}$$

$$A \cap B = \varnothing \ \Rightarrow \boldsymbol{\mu}(A \cup B) = \boldsymbol{\mu}(A) + \boldsymbol{\mu}(B). \tag{۱۵.۱}$$

تابعِ اندازه یک تابعِ مثبتِ فزون‌ور است. اگر اندازه‌یِ مجموعه‌یِ مرجع، $\boldsymbol{\mu}(\Omega)$، محدود باشد، از رویِ آن می‌توان اندازه‌یِ بهنجارشده‌ای مثلِ $P$ را تعریف کنیم که

$$P(A) := \frac{\boldsymbol{\mu}(A)}{\boldsymbol{\mu}(\Omega)}. \tag{۱۶.۱}$$

---

[۱] De Morgan's laws

در این صورت

$$0 \le P(A) \le 1, \tag{۱۷.۱}$$

$$P(\Omega) = 1, \tag{۱۸.۱}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \quad A \cap B = \varnothing. \tag{۱۹.۱}$$

مثال ۱.۲.۱. مجموعه‌یِ شکل‌هایِ دو بعدی رویِ صفحه‌یِ تخت بهنجارش‌پذیر نیست، ولی مجموعه‌یِ شکل‌هایِ رویِ یک کره بهنجارش‌پذیر است. توجه داشته باشید که مساحتِ مرجع یعنی کلِ فضایِ رویِ صفحه‌یِ تخت، نامتناهی است، در حالی که مساحتِ یک کره متناهی است. به این معنا اگر اندازه‌ای که به مجموعه‌یِ مرجع نسبت می‌دهیم نامتناهی باشد، اندازه‌هایِ زیرمجموعه‌هایِ آن بهنجارش‌پذیر نیستند.

احتمال یک روی‌داد را به این صورت تعریف می‌کنیم که

تعریف ۲.۲.۱

- به هر روی‌دادِ ممکن یک مجموعه نسبت می‌دهیم.
- برایِ این مجموعه‌ها یک تابعِ اندازه تعریف می‌کنیم.
- احتمال برابر است با اندازه‌یِ بهنجارشده‌یِ مجموعه‌یِ متناظر با آن روی‌داد، یعنی نسبتِ اندازه‌یِ مجموعه‌یِ متناظر با آن روی‌داد به اندازه‌یِ مجموعه‌یِ مرجع که مجموعه‌یِ همه‌یِ روی‌دادها است.
- احتمال اجتماعِ روی‌دادهایِ متمایز جمعِ احتمالِ وقوعِ آن روی‌دادهاست.

چون $A \cup \bar{A} = \Omega$ است،

$$P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1. \tag{۲۰.۱}$$

اما $A \cap \bar{A} = \varnothing$ پس

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \tag{۲۱.۱}$$

چون اجتماعِ مجموعه‌یِ تهی و مجموعه‌یِ مرجع همان مجموعه‌یِ مرجع است،

$$P(\varnothing) = 0.$$

با استفاده از مجموعه روابطِ (۵.۱ـ۱۰.۱) می‌توانیم نتیجه بگیریم که

$$P(A) = [P(A-B) + P(A\cap B)], \tag{۲۲.۱}$$

$$P(B) = [P(A\cap B) + P(B-A)], \tag{۲۳.۱}$$

و

$$\begin{aligned} P(A\cup B) =& P(A-B) + P(A\cap B) + P(B-A), \\ =& P(A-B) + P(A\cap B) + P(A\cap B) \\ &+ P(B-A) - P(A\cap B), \\ =& P(A) + P(B) - P(A\cap B). \end{aligned} \tag{۲۴.۱}$$

همان طور که در این مورد هم دیدیم، اگر احتمالِ اجتماعِ رویدادهایی که مجزا نیستند را بخواهیم به دست آوریم، باید آن‌ها را به صورتِ اجتماعِ روی‌دادهایِ مجزا نوشت.

**تعریف ۳.۲.۱** دو روی‌داد که اشتراکِ مجموعه‌ای‌یِ‌شان تهی باشد، متمایز هستند.

فرض کنید کلِ روی‌دادها را به تعدادی روی‌دادِ متمایز تقسیم می‌کنیم. در این صورت

$$\mathbf{\Omega} = \bigcup_i E_i, \tag{۲۵.۱}$$

$$E_i \cap E_j = \varnothing. \tag{۲۶.۱}$$

در این صورت

$$P(\bigcup_i E_i) = \sum_i P(E_i) = P(\mathbf{\Omega}) = 1. \tag{۲۷.۱}$$

مثال ۴.۲.۱. فرض کنید کسی یک بار سکه ی کاملا متقارنی را می‌اندازد. احتمالِ آن که دفعه‌یِ اول شیر بیاید $P(A) = 1/2$ و احتمالِ آن که دفعه‌یِ اول خط بیاید $P(B) = 1/2$ است. اگر او سه بار سکه بیندازد، روی‌دادهایِ ممکن

$$\begin{aligned}&\{AAA\},\\&\{BAA\},\{ABA\},\{AAB\},\\&\{BBA\},\{BAB\},\{ABB\},\\&\{BBB\},\end{aligned}$$

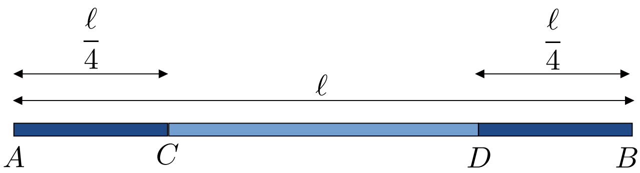
است که همگی هم احتمالند. روی‌داد مرجع عبارت است از

$$\{BBB, BBA, BAB, ABB, BAA, ABA, AAB, AAA\}.$$

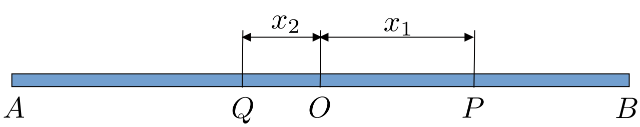
ب_ احتمالِ آن‌که همان دفعه‌یِ اول شیر بیاید $P(A_1) = 1/2$ است. احتمالِ آن‌که دفعه‌یِ اول شیر نیاید و دفعه‌یِ دوم شیر بیاید $P(A_2) = 1/4$ است. و بالاخره احتمالِ آن‌که $n-1$ دفعه شیر نیاید و دفعه‌یِ $n$ اُم شیر بیاید $P(A_n) = 1/2^n$، است. اگر این‌کار را به کرّات انجام دهد نهایتا شیر خواهد آمد، یعنی

$$\sum_n P(A_n) = \sum_{i=1}^{\infty}(1/2)^n = 1. \tag{۲۸.۱}$$

مثال ۵.۲.۱. الف_ رویِ پاره‌خطِ $AB$ به طولِ $\ell$ نقطه‌یِ $Q$ به طورِ کاملاً تصادفی انتخاب می‌شود. این نقطه پاره‌خط را به دو تکه تقسیم می‌کند. احتمالِ این‌که نسبتِ اندازه‌یِ قطعه‌یِ کوچک‌تر به بزرگ‌تر، کوچک‌تر یا مساویِ $1/3$ باشد چه قدر است؟ شکلِ ۱.۱ را ببینید. در نقاطِ $C$ و $D$ نسبتِ قطعه‌یِ کوچک‌تر به بزرگ‌تر یعنی $AC/BC$ و $BD/AD$ دقیقاً مساویِ $1/3$ است. مجموعه نقاطی رویِ پاره‌خطِ $AB$ که نسبتِ قطعه‌یِ کوچک‌تر به بزرگ‌تر کوچک‌تر یا مساویِ $1/3$ باشد، نقاطی است که روی تکه‌هایِ تیره‌تر رویِ خط، یعنی نقاطِ رویِ $AC$ و $BD$ هستند. مجموعِ اندازه‌یِ این تکه‌ها به کلِ پاره‌خط $1/2$ است. پس احتمال 50 درصد است.




شکل ۱.۱




شکل ۲.۱

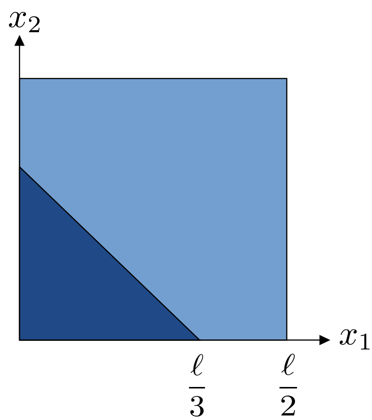
ب ـ نقطه‌یِ $O$ وسطِ پاره‌خطِ $AB$ است. نقطه‌یِ $P$ به طورِ کاملاً تصادفی سمتِ راستِ نقطه‌یِ $O$ و نقطه‌یِ $Q$ به طورِ کاملاً تصادفی سمتِ چپِ نقطه‌یِ $O$ انتخاب می‌کنیم. شکلِ ۲.۱ را ببینید. احتمالِ این‌که فاصله‌یِ این دو نقطه از $\ell/3$ کوچک‌تر باشد چه‌قدر است؟ مطابقِ شکلِ ۲.۱، $OP = x_1$ و $OQ = x_2$ می‌گیریم. اگر نقاطِ $P$ و $Q$ را کاملاً تصادفی انتخاب کنیم، $0 \leq x_1 \leq \ell/2$ و $0 \leq x_2 \leq \ell/2$ هستند. در این صورت تمام نقاطِ داخل مربعی به ضلعِ $\ell/2$، یعنی مربعی به مساحتِ $\ell^2/4$، ناحیه مرجعِ ما است. شکلِ ۳.۱ را ببینید. اما می‌خواهیم $x_1 + x_2 < \ell/3$ باشد. پس ناحیه‌یِ تیره‌تر ناحیه قابلِ قبول است. اما اندازه‌یِ ناحیه‌یِ تیره‌تر $\ell^2/18$ است و احتمالِ مورد نظر

$$P(x_1 + x_2 < \ell/3) = \frac{\ell^2/18}{\ell^2/4} = \frac{2}{9}. \qquad (۲۹.۱)$$

## ۳.۱ احتمالِ شرطی

احتمالِ شرطی‌یِ $P(A|B)$، احتمالِ این است که $A$ رخ دهد به شرطِ آن‌که $B$ رخ داده باشد. به شرطِ آن‌که $P(B) \neq 0$ باشد،

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}. \qquad (۳۰.۱)$$




شکل ۳.۱

می‌توان نشان داد که

$$P(A|B) = \frac{P(A,B) \geq 0}{P(B) > 0} \geq 0,$$
$$P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega,B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1,$$

و در صورتی که $A \cap C = \varnothing$ در این صورت

$$P(A \cup C|B) = \frac{P((A \cup C) \cap B)}{P(B)} = \frac{P(AB \cup CB)}{P(B)}. \qquad (۳۱.۱)$$

اما از آن‌جایی‌که $AB \cap CB = \varnothing$، نتیجه می‌شود

$$P(AB \cup CB) = P(AB) + P(CB). \qquad (۳۲.۱)$$

پس

$$P(A \cup C|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} + \frac{P(CB)}{P(B)} = P(A|B) + P(C|B). \qquad (۳۳.۱)$$

اگر $B \subset A$، در این صورت $A \cap B = B$ و

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1. \qquad (۳۴.۱)$$

و بالاخره اگر $A \subset B$، در این صورت $A \cap B = A$ و

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} > P(A). \qquad (۳۵.۱)$$

**تعریف ۱.۳.۱** دو رویدادِ $A$ و $B$ مستقل‌اند اگر

$$P(A,B) = P(A)P(B). \qquad (۳۶.۱)$$

در این صورت برایِ دو رویدادِ مستقلِ $A$ و $B$

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} = P(A). \qquad (۳۷.۱)$$

قضیه یا قاعده‌یِ بیز[۱] رابطه‌ای بینِ احتمال‌هایِ شرطی است.

**قضیه ۲.۳.۱ ـ قاعده‌یِ بیز–** بینِ احتمال‌هایِ شرطیِ $P(A|B)$ و $P(B|A)$ می‌توان رابطه‌یِ زیر را نوشت

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}, \qquad (۳۸.۱)$$

اگر کلِ رویدادها را به تعدادی رویدادِ متمایز تقسیم کنیم

$$\mathbf{\Omega} = \bigcup_i E_i, \qquad (۳۹.۱)$$

$$E_i \cap E_j = \varnothing. \qquad (۴۰.۱)$$

یک شکلِ کلی‌تر از قضیه‌یِ بیز به شکلِ زیر به دست می‌آید

$$P(E_i|A) = \frac{P(A \cap E_i)}{P(A)} = \frac{P(A|E_i)P(E_i)}{\sum_j P(A|E_j)P(E_j)}. \qquad (۴۱.۱)$$

[۱] Bayes Theorem

در این‌جا در مخرجِ کسر از

$$P(A) = \sum_j P(A \cap E_j) = \sum_j P(A|E_j)P(E_j). \qquad (۴۲.۱)$$

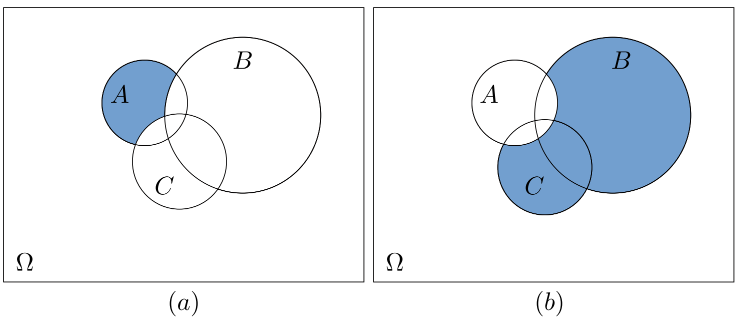
استفاده کرده‌ایم.

مثال ۳.۳.۱. سه رویدادِ $A$، $B$ و $C$ را در نظر بگیرید.

الف_ احتمالِ آن‌که تنها رویدادِ $A$ رخ دهد عبارت است از آن‌که $A$ رخ دهد و $B$ و $C$ رخ ندهند. این احتمال

$$P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C})$$

است. بخشِ $(a)$ در شکلِ ۴.۱ را ببینید.




شکل ۴.۱

ب_ احتمالِ آن‌که رویدادهایِ $B$ و $C$ رخ دهند ولی $A$ رخ ندهد، عبارت است از

$$P(\bar{A} \cap B \cap C)$$

است. شکلِ $(b)$ را ببینید.

ج_ احتمالِ آن‌که حداقل یکی از رویدادها رخ دهند عبارت است از

$$P(A \cup B \cup C).$$

در واقع برایِ این مسائل به‌تر است احتمالِ نقیضِ آن را به دست آوریم که هیچ‌کدام از روی‌دادها رخ ندهند. این احتمال عبارت است از

$$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}),$$

و روی‌دادِ موردِ نظر مکملِ این روی‌داد است، یعنی

$$\overline{P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})}.$$

که مطابقِ قاعده‌یِ دومورگان همان $P(A \cup B \cup C)$ است.

د_ حداقل دو تا از روی‌دادها رخ دهند. در این صورت یا دو روی‌داد رخ می‌دهد یا هر سه روی‌داد رخ می‌دهند. حالت‌هایِ دو روی‌داد $(A, B)$، $(A, C)$ و $(B, C)$ هستند. در این صورت

$$\begin{aligned} P\left((A, B) \cup (A, C) \cup (B, C)\right) = & P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) \\ & - 2P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

هم شامل حالاتی است که فقط دو روی‌داد رخ دهد و هم احتمالِ آن‌که هر سه روی‌داد رخ دهند. بخشِ $(c)$ در شکلِ ۵.۱ را ببینید.

ه_ هر سه روی‌داد رخ دهند. در این صورت می‌رسیم به

$$P(A \cap B \cap C).$$

بخشِ $(d)$ در شکلِ ۵.۱ را ببینید.

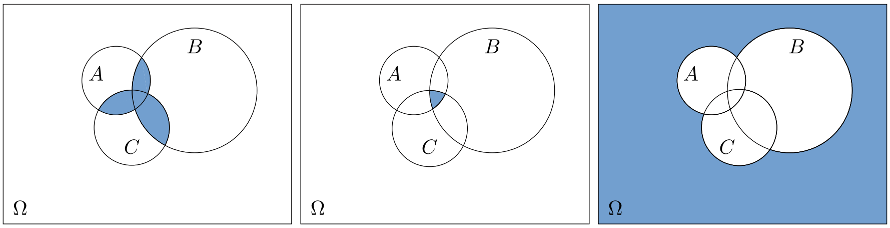
و_ هیچ‌کدام از سه روی‌داد رخ نمی‌دهند. در این صورت می‌رسیم به

$$P(\overline{A \cup B \cup C})$$

که با استفاده از قاعده‌یِ دومورگان همان

$$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$$

است. بخشِ $(e)$ در شکلِ ۵.۱ را ببینید.




$(c)$ $(d)$ $(e)$

شکل ۵.۱

زـ حداکثر یکی از روی‌دادها رخ دهد. این یعنی این که یا فقط یکی از روی‌دادها رخ دهد و دو روی‌دادِ دیگر رخ ندهند یا این که هیچ‌کدام از روی‌داد ها رخ ندهند. در این صورت

$$P((A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})).$$

این حالت نقیضِ بندِ دـ است.

حـ حداکثر دو تا از روی‌دادها رخ دهد. این یعنی این که یا هیچ‌کدام از روی‌داد ها رخ ندهند یا آن که فقط یکی از روی‌دادها رخ دهد و دو روی‌دادِ دیگر رخ ندهند یا این که دو تا از روی‌دادها رخ دهند و سومی رخ ندهد. در این صورت

$$P((A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \\ \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)).$$

برای‌ِ این مسئله هم به‌تر است احتمالِ نقیضِ آن را به دست آوریم. این ترکیب یعنی این‌که تنها حالتِ غیرِمجاز رخ‌دادنِ هر سه روی‌داد است که یعنی

$$P(\overline{A \cap B \cap C}).$$

طـ دقیقا دو روی‌داد رخ دهد

$$P((A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)) = P(A \cap B) \\ + P(A \cap C) + P(B \cap C) - 3P(A \cap B \cap C) \qquad (۴۳.۱)$$

ی ـ حداکثر هر سه روی‌داد رخ دهند. این یعنی آنکه یا هیچ‌کدام از روی‌داد ها رخ ندهند یا آن که فقط یکی از روی‌دادها رخ دهد و دو روی‌دادِ دیگر رخ ندهند یا این که دو تا از روی‌دادها رخ دهند و سومی رخ ندهد یا این‌که بالاخره هر سه روی‌داد رخ دهند. این یعنی مجموعه‌یِ همه‌یِ حالت‌هایِ ممکن، یعنی

$$P(\Omega) = 1$$

است.

مثال ۴.۳.۱. در یک آموزشگاه درس‌هایِ مختلفی ارائه می‌شود. از بینِ آن‌ها سه زبانِ انگلیسی، آلمانی و فرانسوی تدریس می‌شود. ۲۸ درصدِ دانش‌آموزان در کلاسِ انگلیسی، ۲۶ درصد در کلاسِ فرانسوی، و ۱۶ درصد در کلاسِ آلمانی شرکت می‌کنند. ۱۲ درصدِ دانش‌آموزان در کلاسِ انگلیسی و فرانسوی، ۴ درصد در کلاسِ فرانسوی و آلمانی و ۶ درصد در کلاسِ انگلیسی و آلمانی شرکت می‌کنند. ۲ درصدِ دانش‌آموزان در هر سه کلاسِ زبان شرکت می‌کنند. در این صورت اگر فردی را به طور اتفاقی انتخاب کنیم

$$P(A) = 0.28, \quad P(B) = 0.26, \quad P(C) = 0.16,$$
$$P(A \cap B) = 0.12, \quad P(A \cap C) = 0.06, \quad P(B \cap C) = 0.04$$
$$P(A \cap B \cap C) = 0.02.$$

الف ـ احتمالِ آنکه فردی که به طور اتفاقی انتخاب می‌کنیم حداقل در یکی از کلاس‌هایِ زبان شرکت کند، چه‌قدر است؟ این احتمال $P(A \cup B \cup C)$ است. این احتمال را می‌توان به شکلِ زیر نوشت

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) =& P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &+ P(A \cap B \cap C) \\ =& 0.28 + 0.26 + 0.16 - 0.12 - 0.06 - 0.04 + 0.02 \\ =& 0.50. \end{aligned}$$

ب ـ احتمالِ آن‌که فردی که به طور اتفاقی انتخاب می‌کنیم در هیچ‌یک از کلاس‌هایِ زبان شرکت نکند، چه‌قدر است؟ این احتمال $P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$ است که طبقِ قاعده‌یِ دومورگان همان

$$P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 0.5 \qquad (۴۴.۱)$$

است.

ج ـ احتمالِ آن‌که فردی که به طور اتفاقی انتخاب می‌کنیم فقط در یک کلاسِ زبان شرکت کند، چه‌قدر است؟ این احتمال برابر است با

$$\begin{aligned} P =& P(A \cup B \cup C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &+ 2P(A \cap B \cap C) \\ =& 0.5 - 0.12 - 0.06 - 0.04 + 2 \times 0.02 \\ =& 0.32. \end{aligned}$$

د ـ فردی را انتخاب می‌کنیم که در کلاسِ انگلیسی است. احتمالِ آن‌که این فرد در کلاس فرانسه هم باشد، چه‌قدر است؟ و اگر فردی را که انتخاب می‌کنیم در کلاسِ فرانسه باشد، احتمالِ آن‌که این فرد در کلاس انگلیسی هم باشد، چه‌قدر است؟

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.12}{P(0.26)} = \frac{6}{13} \qquad (۴۵.۱)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.12}{P(0.28)} = \frac{3}{7} \qquad (۴۶.۱)$$

## مسائل

۱.۱ نشان دهید اگر دو روی‌دادِ $A$ و $B$ مستقل باشند، جفت روی‌دادهایِ $\bar{A}$ و $B$، $A$ و $\bar{B}$، $\bar{A}$ و $\bar{B}$ نیز مستقل‌اند.

۲.۱ اگر $P(A)=0$ باشد، نشان دهید برایِ هر رویدادِ $B$، $P(A\cap B)=0$.

۳.۱ الف‑ رویِ پاره‌خطی به طولِ $\ell$ نقطه‌یِ $A$ به طورِ کاملاً تصادفی انتخاب می‌شود. این نقطه پاره‌خط را به دو تکه تقسیم می‌کند. احتمالِ این‌که نسبتِ اندازه‌یِ دو تکه، کوچک‌تر یا مساویِ $1/5$ باشد چه قدر است؟

ب‑ نقطه‌یِ $O$ وسطِ پاره‌خط است. نقطه‌یِ $B$ به طورِ کاملاً تصادفی سمتِ راستِ نقطه‌یِ $O$ و نقطه‌یِ $C$ به طورِ کاملاً تصادفی سمتِ چپِ نقطه‌یِ $O$ انتخاب می‌کنیم. احتمالِ این‌که فاصله‌یِ این دو نقطه از $\ell/5$ کوچک‌تر باشد چه‌قدر است؟

۴.۱ دستگاهِ متعامدِ $xy$ را در نظر بگیرید. مربعی به طولِ واحد که یک راسِ آن در مبدا است را در نظر بگیرید. نقطه‌یِ $A$ را به طورِ تصادفی داخلِ مربع در نظر بگیرید. احتمالِ آن‌که فاصله‌یِ $A$ از مبدا کوچک‌تر از 1 باشد، چه‌قدر است؟

۵.۱ دستگاهِ متعامدِ $xy$ را در نظر بگیرید. نقطه‌یِ $A$ را به طورِ تصادفی رویِ محورِ $x$ و نقطه‌یِ $B$ را به طورِ تصادفی رویِ محورِ $y$ با شرطِ $0\le x,y\le 1$ انتخاب می‌کنیم. احتمالِ آن‌که طولِ پاره‌خطِ $AB$ کوچک‌تر از 1 باشد، چه‌قدر است؟

۶.۱ الف‑ دو عددِ A و B را به صورت ِ کاملاً تصادفی بینِ 0 تا 1 انتخاب می‌کنیم. احتمالِ آن‌که $0\le A\le \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}\le B\le 1$ باشد چه‌قدر است؟

ب‑ فرض کنید A و B مولفه‌هایِ $x$ و $y$ِ بردارِ $\boldsymbol{r}$ باشد. دو عددِ A و B را به صورتِ کاملاً تصادفی بینِ 0 تا 1 انتخاب می‌کنیم، احتمالِ آن‌که $0\le A\le \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}\le B\le 1$ و طولِ بردارِ $\boldsymbol{r}$ کوچک‌تر از 1 باشد، چه‌قدر است؟

۷.۱ الف‑ دو عددِ A و B را به صورت ِ کاملاً تصادفی بینِ 0 تا 1 انتخاب می‌کنیم. احتمالِ آن‌که $0\le A\le \frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}\le B\le 1$ باشد چه‌قدر است؟

ب۱‑ فرض کنید A و B مولفه‌هایِ $x$ و $y$ِ بردارِ $\boldsymbol{r}$ باشد. دو عددِ A و B را به صورتِ کاملاً تصادفی بینِ 0 تا 1 انتخاب می‌کنیم، احتمالِ آن‌که طولِ بردارِ $\boldsymbol{r}$ کوچک‌تر از 1 باشد، چه‌قدر است؟

ب۲‑ فرض کنید A و B مولفه‌هایِ $x$ و $y$ِ بردارِ $\boldsymbol{r}$ باشد. دو عددِ A و B را به صورتِ کاملاً تصادفی بینِ 0 تا 1 انتخاب می‌کنیم، احتمالِ آن‌که $0\le A\le \frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}\le B\le 1$

و طولِ بردارِ $r$ کوچک‌تر از $1$ باشد، چه‌قدر است؟

۱.۸ الف– سکه‌ای را سه دفعه پرتاب کرده‌ایم و هر سه دفعه شیر آمده است. خیلی‌ها می‌گویند، دفعه‌یِ بعد دیگر حتماً شیر می‌آید. احتمالِ آن‌که دفعه‌یِ بعد شیر بیاید چه‌قدر است؟

در این مساله به مغالطه قمارباز می‌پردازیم. رولِت یک بازی در قمارخانه‌هاست. رولت چرخی است که مجموعه‌ای از اعداد بین یک تا ۹۰، رویِ آن است. چرخ را می‌چرخانند تا این‌که پس از مدتی ساکن شود و رویِ عددی بایستد. قمارباز می‌تواند رویِ این که رولت رویِ چه عددی بازمی‌ایستد، شرط‌بندی کند. از سال ۲۰۰۳ تا سالِ ۲۰۰۵ در ۱۸۲ موردِ متوالی عددِ ۵۳ در میان اعدادِ رویِ چرخ رولت شهرِ ونیز، ظاهر نشد.

ب– احتمالِ آن‌که ۱۰ دفعه‌یِ متوالی ۵۳ نیاید چه‌قدر است؟

ج– احتمالِ آن‌که ۱۸۲ دفعه متوالی ۵۳ نیاید چه‌قدر است؟

ه– قماربازانِ زیادی در این مدت ترغیب می‌شدند که شرط‌بندی‌هایِ بزرگی بر روی این عدد بکنند، با این استدلال که احتمالِ این‌که ۱۸۲ موردِ متوالی این عدد نیاید بسیار کم است، پس دفعه‌هایِ بعد عدد ۵۳ حتماً باید دوباره ظاهر شود و شروع به شرط‌بندی‌هایِ بزرگی رویِ این عدد کردند. کارِ آن‌ها معقول بود؟ احتمالِ این‌که در دفعه‌یِ بعد قمارباز برنده شود چه‌قدر است؟ این ماجرا به تبِ ۵۳ ایتالیا معروف است.[۱]

۱.۹ سه نفر سه کتابِ خود را رویِ میز می‌گذارند. اگر این سه نفر هر کدام یک کتاب را به صورتِ تصادفی از رویِ میز بردارد،

الف– احتمالِ آن که هر کس کتابِ خود را برداشته باشند چه‌قدر است؟

ب– احتمالِ آن که حداقل یکی از آن‌ها کتابِ خود را برداشته باشد، چه‌قدر است؟

ج– احتمالِ آن که هیچ‌کدام کتابِ خود را برنداشته باشد، چه‌قدر است؟

د– اگر به جایِ سه نفر چهار نفر و به جایِ سه کتاب چهار کتاب باشد، جوابِ هر یک از بخش‌هایِ قبل در این مورد چه می‌شود؟

ه– اگر $N$ نفر با $N$ کتاب باشند، در حدِّ $N \to \infty$ جوابِ بخش‌هایِ (الف) تا (ج)

[۱] چهار نفر در این تب ۵۳ مُردند. یک زن در توسکانی به خاطرِ این‌که همه‌یِ پس‌اندازِ خانواده را به باد داده بود، خودش را غرق کرد. یک مرد هم در نزدیکی‌یِ فلورانس که زندگی‌اش را از دست داده‌بود، قبل از خودکشی هم‌سر و پسرش را کشت. The Guardian

در این مورد چه می‌شود؟

راه‌نمایی: ممکن است رابطه‌ی زیر به دردِ شما بخورد.

$$\begin{aligned} P(A\cup B\cup C\cup D\cup\cdots) &= P(A)+P(B)+P(C)+\cdots \\ &- P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(A\cap D)-\cdots \\ &+ P(A\cap B\cap C)+P(A\cap B\cap D)-P(B\cap C\cap D)+\cdots \\ &- P(A\cap B\cap C\cap D)-\cdots \end{aligned}$$

۱۰.۱ یک مرکزِ خرید هم پول نقد قبول می‌کند و هم کارتِ بانکی‌یِ بانکِ A را می‌پذیرد. ۲۰ درصدِ مشتریان کارتِ بانکی‌یِ آن بانک را دارند و ۶۰ درصدِ مشتریان پولِ نقد دارند. ۱۰ درصد هم کارتِ بانکی‌یِ آن بانک را همراه دارند و هم پولِ نقد. چند درصد از مشتریان می‌توانند از فروشگاه خرید کنند؟

۱۱.۱ دو نقطه‌یِ $A$ و $B$ را به طورِ تصادفی رویِ محورِ $x$ بینِ مبدا و نقطه‌ای در $x=1$ یعنی با شرطِ

$$0\leq x_A, x_B\leq 1$$

انتخاب می‌کنیم. احتمالِ آن‌که $x_B\leq x_A^2$ باشد، چه‌قدر است؟

۱۲.۱ الف ــ دو نقطه‌یِ $A$ و $B$ را کاملاً به طورِ تصادفی رویِ محورِ $x$ بینِ مبدا و نقطه‌یِ $x=1$ یعنی با شرطِ

$$0\leq x_A, x_B\leq 1$$

انتخاب می‌کنیم. احتمالِ آن‌که $|x_B-x_A|>1/2$ باشد، چه‌قدر است؟

ب ــ احتمالِ آن‌که $|x_B-x_A|<1/2$ باشد، چه‌قدر است؟

۱۳.۱ دو نقطه‌یِ $A$ و $B$ را به طورِ تصادفی رویِ محورِ $x$ بینِ مبدا و نقطه‌ای در $x=1$ با شرطِ

$$0\leq x_A, x_B\leq 1$$

انتخاب می‌کنیم.

الف_ احتمالِ آن‌که $x_A^3 \le x_B \le x_A^2$ باشد، چه‌قدر است؟

ب_ احتمالِ آن‌که $x_A^2 \le x_B \le x_A^3$ باشد، چه‌قدر است؟

۱۴.۱ روی‌دادهای $A$، $B$ و $C$ با احتمال‌های

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3},$$
$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4},$$
$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{5},$$

را در نظر بگیرید.

الف_ احتمالِ این‌که نه $A$، و نه $B$ رخ دهد، چه‌قدر است؟

ب_ احتمالِ آن‌که حداقل یکی از سه روی‌دادِ $A$، $B$ و $C$ رخ دهد، چه‌قدر است؟

ج_ احتمالِ آن‌که حداقل دو تا از سه روی‌دادِ $A$، $B$ و $C$ رخ دهد، چه‌قدر است؟

راه‌نمایی: ممکن است رابطه‌یِ زیر به دردِ شما بخورد.

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C \cup D \cup \cdots) &= P(A) + P(B) + P(C) + \cdots \\ &- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(A \cap D) - \cdots \\ &+ P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap D) - P(B \cap C \cap D) + \cdots \\ &- P(A \cap B \cap C \cap D) - \cdots \end{aligned}$$

۱۵.۱ اگر $P(A) = 1/4$، $P(B) = 1/3$ و $A \subset B$ باشد، $P(A|B)$، $P(B|A)$، $P(B|\bar{A})$ و $P(\bar{B}|\bar{A})$ چه‌قدر هستند؟ آیا $A$ و $\bar{B}$ متمایزند؟ آیا $A$ و $\bar{B}$ مستقل‌اند؟

۱۶.۱ مثبتِ کاذب، خطایی در گزارشِ یک اندازه‌گیری است که در آن نتیجه آزمایش به غلط نشان‌دهنده‌یِ وجود یک حالت است، در حالی که در واقع آن حالت وجود ندارد. مثلاً نتیجه‌یِ آزمایشِ شخصی مثبت است ولی او بیمار نیست. ممکن هم هست جوابِ آزمایش برعکس یعنی منفی‌یِ کاذب باشد. مثلاً در تستِ بیماری‌یِ کوویدِ ۱۹، منفی‌یِ کاذب یعنی این‌که نتیجه‌یِ آزمایشِ شخصی منفی است در حالی‌که آن شخص واقعاً کرونا دارد و بیمار است. دو حالتِ دیگرهم هست، دو نتیجه‌یِ درست یا همان مثبتِ درست و منفی‌یِ درست.

یک بیماری‌یِ نادر بیماری‌ای است که درصد کمی از جمعیت را درگیر می‌کند. در ایالات متحده، از سال 2002 بیماری‌یِ نادر با توجه به شیوعِ آن بیماری تعریف می‌شود. هر بیماری‌ای که کمتر از $200,000$ نفر در ایالات متحده را مبتلا کند، یعنی با حدود 1 در1500 نفر بیماری‌یِ نادر است. در ژاپن تعریفِ بیماری نادر عبارت است از کمتر از $50,000$ بیمار یعنی حدود 1 در 2.500 نفر در ژاپن. در اتحادیه اروپا این عدد 1 نفر از 2000 نفر است.

بیایید احتمال درگیر شدن با یک بیماری‌یِ نادر $p = 0.02\%$ یعنی یک نفر از هر 5000 نفر بگیریم. آزمایشی برایِ تشخیصِ این بیماری وجود دارد. اگر کسی این بیماری را داشته باشد، احتمالِ آن‌که نتیجه آزمایش مثبت شود $P(+|X) = 99.90\%$ و اگر این بیماری را نداشته باشد، احتمالِ آن‌که نتیجه آزمایش منفی شود $P(-|\bar{X}) = 99.95\%$ است.

الف- فرض کنید نتیجه‌یِ آزمایشِ فردی مثبت باشد، احتمالِ آن‌که او واقعاً بیمار باشد چه‌قدر است؟

ب- فرض کنید، فردی دو بار مستقلاً آزمایش می‌شود. اگر نتیجه‌یِ هر دو آزمایش مستقلاً مثبت باشد، احتمالِ آن‌که او واقعاً بیمار باشد چه‌قدر است؟

ج- فرض کنید، فردی دو بار مستقلاً آزمایش می‌شود. نتیجه‌یِ آزمایشِ اول را با $A$ و آزمایشِ دوم را با $B$ نشان می‌دهیم که هرکدام می‌توانند مثبت یا منفی باشند. احتمالِ آن‌که او واقعاً بیمار باشد یعنی $P(X|A \cap B)$ بر حسبِ $P(A|X), P(B|X), P(A|\bar{X})$ و $P(B|\bar{X})$ چه‌قدر است؟ اگر نتیجه‌یِ هر دو آزمایش مستقلاً منفی باشد، احتمالِ آن‌که او واقعاً بیمار نباشد چه‌قدر است؟

راه‌نمایی - چون نتیجه‌یِ دو آزمایش یعنی $A$ و $B$ را مستقل گرفته‌ایم،

$$P(A \cap B|X) = P(A|X) \cdot P(B|X)$$

است.

# ۲
# متغیرهایِ تصادفی

## ۱.۲ توزیع‌هایِ گسسته

آزمایشی را در نظر بگیرید که نتیجه آن مقداری تصادفی از بینِ تعدادی مقدارِ گسسته است. این مقادیرِ گسسته را می‌توانیم به صورت اعدادِ صحیح، مثلاً $n$ مرتب کنیم. احتمالِ هر کدام از این حالت‌ها $P(n)$ عددی حقیقی و مثبت است، به طوری‌که

$$\sum_n P(n) = 1. \tag{۱.۲}$$

برایِ یک تاسِ ایده‌آل حالت‌هایِ ممکنِ دستگاه ۶ تاست، که هر ۶ حالت هم‌احتمال هستند. در این حالت می‌گوییم توزیع یک‌نواخت است.

$$P(\{i\}) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & i = 1, \cdots 6 \\ 0, & \text{otherswise.} \end{cases} \tag{۲.۲}$$

متوسطِ مقدارِ یک تاس به صورتِ

$$\langle i \rangle = \sum_i iP(\{i\}) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3.5 \tag{۳.۲}$$

تعریف می‌شود.

اگر به جایِ یک تاس، دو تاس داشته باشیم، ۳۶ حالت مختلفِ هم‌احتمال داریم.

$$P(\{i,j\}) = \begin{cases} \frac{1}{36}, & i,j = 1,\cdots 6 \\ 0, & \text{otherswise.} \end{cases} \tag{۴.۲}$$

در این حالت می‌گوییم توزیع یک‌نواخت است. حالا می‌توانیم این سوال را مطرح کنیم که احتمالِ آن‌که جمعِ دو تاس یک مقدارِ معین باشد چه‌قدر است. در این حالت کم‌ترین مقدارِ ممکن ۲ و بیش‌ترین مقدارِ ممکن ۱۲ است. محتمل‌ترین مقدار چیست؟ کم‌ترین (بیش‌ترین مقدار) متناظر با ۱ حالت $\{1,1\}$ ($\{6,6\}$) است، ولی مثلاً مجموعِ ۳ متناظر با دو حالتِ $\{1,2\},\{2,1\}$ است. به هر کدام از این ۳۶ حالت ، میکروحالت و به ۱۱ حالتِ مجموع ، ماکروحالت می‌گوییم. بنا بر این ۳۶ میکروحالتِ هم‌احتمال و ۱۱ ماکروحالت داریم که احتمال‌هایِ متفاوتی دارند.

$$\{1,1\} \qquad P(2) = \frac{1}{36} \tag{۵.۲}$$

$$\{1,2\},\{2,1\} \qquad P(3) = \frac{1}{18} \tag{۶.۲}$$

$$\{1,3\},\{3,1\},\{2,2\} \qquad P(4) = \frac{1}{12} \tag{۷.۲}$$

$$\{1,4\},\{4,1\},\{2,3\},\{3,2\} \qquad P(5) = \frac{1}{9} \tag{۸.۲}$$

$$\{1,5\},\{5,1\},\{2,4\},\{4,2\},\{3,3\} \qquad P(6) = \frac{5}{36} \tag{۹.۲}$$

$$\{1,6\},\{6,1\},\{2,5\},\{5,2\},\{4,3\},\{3,4\} \qquad P(7) = \frac{1}{6} \tag{۱۰.۲}$$

$$\{2,6\},\{6,2\},\{3,5\},\{5,3\},\{4,4\} \qquad P(8) = \frac{5}{36} \tag{۱۱.۲}$$

$$\{3,6\},\{6,3\},\{5,4\},\{4,5\} \qquad P(9) = \frac{1}{9} \tag{۱۲.۲}$$

$$\{4,6\},\{6,4\},\{5,5\} \qquad P(10) = \frac{1}{12} \tag{۱۳.۲}$$

$$\{5,6\},\{6,5\} \qquad P(11) = \frac{1}{18} \tag{۱۴.۲}$$

$$\{6,6\} \qquad P(12) = \frac{1}{36}. \tag{۱۵.۲}$$

همان‌طور که می‌بینیم

$$P(2) = P(\{1,1\}) = p(\{1\}) \cdot p(\{1\}) = \frac{1}{36} \tag{۱۶.۲}$$

$$P(3) = p(\{1\}) \cdot p(\{2\}) + p(\{1\}) \cdot p(\{2\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \tag{۱۷.۲}$$

هرچند همه‌ی میکروحالت‌ها هم‌احتمال و با توزیعِ یک‌نواخت هستند، ولی ماکروحالت‌ها چنین نیستند و توزیعشان یک‌نواخت نیست.

مفهومِ متوسط را به توان‌های بالاترِ متغیرِ تصادفی هم تعمیم می‌دهیم، مثلاً

$$\langle n^k \rangle = \sum_i n^k P(\{n\}). \tag{۱۸.۲}$$

به $\langle n^k \rangle$ ممانِ $k$ اُم متغیرِ تصادفی‌ِ $n$ می‌گوییم. اگر همه‌ی روی‌دادها یک خروجی داشته باشند، ممانِ $k$ اُمِ متغیرِ تصادفی‌ِ $n$، همان ممانِ اول به توانِ $k$ است. کمیت دیگری که تعریف می‌شود واریانس است که به صورتِ زیر تعریف می‌شود.

$$\mathfrak{V}ar^2(n) :=\langle(\Delta n)^2\rangle = \langle(n - \langle n \rangle)^2\rangle \tag{۱۹.۲}$$

$$\mathfrak{V}ar(n) =\sqrt{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2} \tag{۲۰.۲}$$

واریانس پارامتری برای تعیینِ پراکندگی‌ِ نتایجِ اندازه‌گیری حولِ مقدارِ متوسط است.

### ۱.۱.۲ تابعِ مولد

راهی برای به دست آوردنِ ممان‌های یک متغیرِ تصادفی استفاده از تابعِ مولد است. تابعِ مولد بیش‌تر زمانی به کار می‌آید که تعدادِ حالت‌های ممکن نامحدود باشد. $P(n)$ را احتمالِ رخ‌دادنِ $n$ می‌گیریم. اگر متغیرِ تصادفی‌ِ $n$ همه‌ی اعدادِ صحیحِ نامنفی را بتواند انتخاب کند در این صورت تابعِ مولدِ $f(Z)$ با

$$f(Z) := \sum_{n=0}^{\infty} P(n) Z^n \tag{۲۱.۲}$$

تعریف می‌شود، که خاصیت $f(1) = 1$ را دارد. با استفاده از این تابع و مشتقاتِ آن متوسطِ $n$ و بقیه توابعِ هم‌بستگی را می‌توان به دست آورد.

$$\langle n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} nP(n) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}Z}\Big|_{Z=1}, \tag{۲۲.۲}$$

$$\langle n(n-1)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)P(n) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}Z^2}\Big|_{Z=1}, \tag{۲۳.۲}$$

$$\langle n(n-1)\cdots(n-k+1)\rangle = \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}Z^k}\Big|_{Z=1} \tag{۲۴.۲}$$

واریانس را هم بر حسبِ تابعِ مولد می‌توان نوشت

$$\mathfrak{V}ar(n) = (\Delta n)^2 := \langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2 \tag{۲۵.۲}$$

$$= \left[\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}Z^2} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}Z} - \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}Z}\right)^2\right]\Big|_{Z=1} \tag{۲۶.۲}$$

از تابعِ دیگری مثلِ $M(u)$ که به صورتِ زیر تعریف می‌شود

$$M(u) := \langle \mathrm{e}^{nu}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P(n)\mathrm{e}^{nu} = f(Z)\big|_{Z=\exp(u)}, \tag{۲۷.۲}$$

نیز گاهی استفاده می‌شود. از این‌جا می‌توان نشان داد که

$$\frac{\mathrm{d}^k M(u)}{\mathrm{d}u^k}\Big|_{u=0} = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}u^k}\langle \mathrm{e}^{nu}\rangle\Big|_{u=0} = \langle n^k\rangle. \tag{۲۸.۲}$$

همان‌طور که می‌بینیم توابعِ هم‌بستگی برحسبِ مشتقاتِ $M(u)$ شکلِ ساده‌تری دارد.

### ۲.۱.۲ توزیعِ دوجمله‌ای

یک دستگاه دو حالته که احتمالِ یک حالت

$$P(A) = p \tag{۲۹.۲}$$

و احتمالِ حالتِ دیگر

$$P(B) = 1 - p =: q \tag{۳۰.۲}$$

است، را در نظر بگیرید. احتمالِ این که یک خروجیِ خاص مثلِ $AABA$ داشته باشیم $P(A,A,B,A)=p^3q$ است ولی احتمالِ اینکه از چهار مورد، مستقل از ترتیب رخ دادن آن‌ها سه مورد حالتِ $A$ و یک مورد $B$ باشد $P(3)=4p^3q$ است. در حالتِ کلی احتمالِ اینکه از $N$ مورد، مستقل از ترتیب رخ دادنِ آن‌ها $n$ بار حالتِ $A$ و $N-n$ بار $B$ باشد

$$P(n):=C_n p^n q^{N-n} \tag{۳۱.۲}$$

است که

$$C_n:=\frac{N!}{n!(N-n)!}=\binom{N}{n}. \tag{۳۲.۲}$$

واضح است که مجموعِ احتمالِ تمامِ حالت‌هایِ ممکن باید یک شود

$$\sum_{n=0}^{N}P(n)=\sum_{n=0}^{N}\frac{N!}{n!(N-n)!}p^n q^{N-n}=(p+q)^N=1. \tag{۳۳.۲}$$

مثال ۱.۱.۲. یک سکه با دو رویِ مثلا شیر و خط یک دستگاهِ دو حالته است. احتمالِ شیر آمدن $p$ و احتمالِ خط آمدن $q$ است. احتمالِ آنکه پس از $N$ پرتابِ سکه $n$ بارِ اول شیر بیاید و $N-n$ بارِ بعدی خط بیاید $p^n q^{N-n}$ است. اما اگر برایِ ما ترتیبِ شیر یا خط آمدن مهم نباشد و بخواهیم احتمالِ این که پس از $N$ پرتابِ سکه $n$ بار شیر بیاید

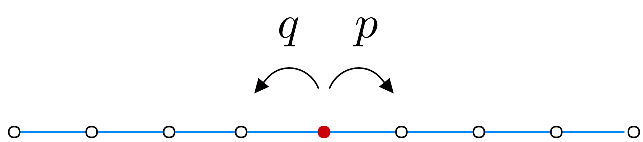
$$P(n):=\binom{N}{n}p^n q^{N-n} \tag{۳۴.۲}$$

است.

مثال ۲.۱.۲. ولِ‌گشتِ[۱] یک‌بعدی مثالِ دیگری از یک توزیعِ دوجمله‌ای است. در مساله‌یِ ول‌گشتِ ساده، یک ول‌گرد که با $\bullet$ نشانش می‌دهیم، در ابتدا در نقطه‌ای است که آن را مبدا می‌گیریم. جای‌گاه‌هایِ خالی را با $\circ$ نشان می‌دهیم. شکلِ (۱.۲) را ببینید. در هر قدم یا پله زمانی او با احتمالِ $p$ یک قدم به راست و با احتمالِ $q:=1-p$ به سمتِ چپ می‌رود. تعدادِ حالت‌هایی که از کلِّ $N$ قدمی که برداشته، بدونِ در نظر گرفتنِ ترتیبِ قدم‌ها $n$ قدمِ آن را به سمتِ راست و $N-n$ قدم را به سمتِ چپ برداشته باشد

$$\frac{N!}{n!(N-n)!} \tag{۳۵.۲}$$

---
[۱] Random Walk




شکل ۱.۲ پدیده‌یِ ول‌گشتِ یک‌بعدی. ول‌گردی رویِ یک شبکه‌یِ یک‌بعدی حرکت می‌کند.

است. احتمالِ آن‌که بعد از $N$ قدم، $n$ قدمِ آن را به سمتِ راست و $N-n$ قدم را به سمتِ چپ برداشته باشد

$$P(n) := \binom{N}{n} p^n q^{N-n} \tag{۳۶.۲}$$

است. اگر او از $N$ قدم، $n$ قدم را به سمتِ راست برداشته باشد، در این صورت در جای‌گاهِ

$$m = n - (N-n) = 2n - N \tag{۳۷.۲}$$

است. در این مورد برای به دست آوردنِ تابعِ مولد حدِ بالایِ جمع به جایِ $\infty$، مقدارِ $N$ است. ولی با توجه به این‌که $(N-n)!$ به ازایِ $n \geq N+1$ فاکتوریلِ یک عددِ صحیحِ منفی است، که مقدارش بی‌نهایت است، عملاً آن جمله‌ها هیچ سهمی در سری ندارند. تابعِ مولدِ را با محاسبه‌یِ مستقیم می‌توانیم به دست آوریم

$$f(Z) = \sum_{n=0}^{N} P(n) Z^n = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} p^n q^{N-n} Z^n \tag{۳۸.۲}$$

$$= (pZ+q)^N. \tag{۳۹.۲}$$

با استفاده از این تابع و مشتقاتِ آن متوسطِ $n$ که با $\mu$ نشانش می‌دهیم

$$\mu := \langle n \rangle = \sum_{n=0}^{N} n P(n) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}Z}\Big|_{Z=1} = Np. \tag{۴۰.۲}$$

و بقیه توابعِ هم‌بستگی را هم می‌توان به دست آورد.

$$\langle n(n-1) \rangle = \sum_{n=0}^{N} n(n-1) P(n) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}Z^2}\Big|_{Z=1} = N(N-1)p^2. \tag{۴۱.۲}$$

$$\langle n(n-1)\cdots(n-k+1)\rangle = \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}Z^k}\Big|_{Z=1}$$
$$= \begin{cases} N(N-1)\cdots(N-k+1)p^k, & k \le N, \\ 0, & k > N. \end{cases} \qquad (۴۲.۲)$$

از این‌جا برایِ واریانس می‌رسیم به

$$\mathfrak{V}ar(n) = (\Delta n)^2 := \langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2 = Np(1-p), \qquad (۴۳.۲)$$

و

$$\frac{\Delta n}{\langle n\rangle} = \sqrt{\frac{1-p}{p}}\, N^{-1/2}. \qquad (۴۴.۲)$$

در این‌صورت برایِ $N$ هایِ بزرگ کسرِ بالا به سمتِ صفر می‌رود، یعنی نسبتِ پهنایِ توزیعِ دوجمله‌ای به مقدارِ متوسطِ $n$ به سمتِ صفر می‌رود و توزیع باریک می‌شود.
تابعِ $M(u)$ به صورتِ زیر تعریف میشود

$$M(u) := \langle \mathrm{e}^{nu}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P(n)\mathrm{e}^{nu}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N!}{n!(N-n)!}(p\mathrm{e}^u)^n(1-p)^{N-n}$$
$$= (p\mathrm{e}^u + 1 - p)^N. \qquad (۴۵.۲)$$

از این‌جا می‌توان نشان داد که

$$\frac{\mathrm{d}^k M(u)}{\mathrm{d}u^k}\Big|_{u=0} = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}u^k}\langle \mathrm{e}^{nu}\rangle\Big|_{u=0} = \langle n^k\rangle. \qquad (۴۶.۲)$$

### ۳.۱.۲ توزیعِ هندسی

دستگاهی دو حالته با همان احتمال‌هایِ $p$ و $q = 1-p$ (مثلاً همان سکه انداختن یا ول‌گشت)

را در نظر بگیرید. احتمالِ آن‌که $n$ دفعه حالتِ $B$ رخ دهد و دفعه‌یِ $n+1$ اُم حالتِ $A$ رخ دهد عبارت است از $P(n) = q^n p$. برایِ چنین دستگاهی تابعِ مولد عبارت است از

$$f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) Z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (qZ)^n p = \frac{p}{1-qZ}. \tag{۴۷.۲}$$

و از این‌جا می‌رسیم به

$$\mu := \langle n \rangle = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}Z}\Big|_{Z=1} = \frac{q}{p}, \tag{۴۸.۲}$$

$$\mathfrak{V}ar(n) = \frac{q}{p^2}, \tag{۴۹.۲}$$

$$\frac{\Delta n}{\langle n \rangle} = q^{-1/2}. \tag{۵۰.۲}$$

همه این‌ها را بر حسبِ $\mu := \langle n \rangle$ هم می‌توان نوشت.

$$P(n) = \frac{\mu^n}{(\mu+1)^{n+1}}, \tag{۵۱.۲}$$

$$f(Z) = \frac{\mu}{\mu + 1 - \mu Z}. \tag{۵۲.۲}$$

### ۴.۱.۲ توزیعِ پواسون

در حدی که $N \to \infty$ و $p \to 0$ و با این شرط که $NP$ محدود بماند، توزیعِ دوجمله‌ای

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ p\to 0}} Np = \mu, \tag{۵۳.۲}$$

به توزیعِ زیر تبدیل می‌شود که به آن توزیعِ پواسون می‌گویند

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ p\to 0}} P(n) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ p\to 0}} \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} \tag{۵۴.۲}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{n!} (\frac{\mu}{N})^n (1-\frac{\mu}{N})^{N-n} \tag{۵۵.۲}$$

$$\approx \lim_{N\to\infty} \frac{N^n}{n!} \cdot \frac{\mu^n}{N^n} (1-\frac{\mu}{N})^{N-n} \tag{۵۶.۲}$$

$$\approx \lim_{N\to\infty} \frac{\mu^n}{n!} e^{-\frac{\mu}{N}\cdot(N-n)} \tag{۵۷.۲}$$
$$= \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu}, \tag{۵۸.۲}$$

توجه داریم که این سری هم حدِ بالایش واقعاً یک عددِ محدود است ولی به خاطرِ این‌که جملاتِ سری برایِ $n$ هایِ بزرگ به‌سرعت نزولی است، در محاسبه‌یِ تابعِ مولد برایِ ساده‌شدنِ محاسبه حدِ بالایِ سری را بی‌نهایت می‌گیریم. با توجه به این‌که در توزیعِ پواسون از ابتدا فرض کردیم $N \gg 1$ است، این تقریب عملاً تغییری در نتیجه ایجاد نمی‌کند. برایِ این توزیع

$$f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) Z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu Z)^n}{n!} e^{-\mu} = e^{\mu(Z-1)}, \tag{۵۹.۲}$$
$$f'(1) = \mu = \langle n \rangle, \tag{۶۰.۲}$$
$$f^{(k)} = \langle n(n-1)\cdots(n-k+1)\rangle = \mu^k, \tag{۶۱.۲}$$
$$\mathfrak{V}ar(n) = \mu. \tag{۶۲.۲}$$

مثال ۳.۱.۲. یک کتابِ ۶۰۰ صفحه‌ای، ۶۰۰ غلط دارد، احتمالِ این‌که یک صفحه دست‌ِکم سه غلط داشته باشد چه‌قدر است؟

در این مسئله احتمالِ غلط بودنِ یک کلمه $1 \ll p$ و تعدادِ کلمه‌ها $1 \gg N$ است، اما تعدادِ متوسطِ غلط در هر صفحه $\mu = 1$ است. بنا بر این از توزیعِ پواسون استفاده می‌کنیم

$$P(0) = e^{-1} \quad P(1) = e^{-1}, \quad P(2) = \frac{1}{2}e^{-1}, \quad P(3) = \frac{1}{6}e^{-1}, \cdots \tag{۶۳.۲}$$

احتمالِ این‌که یک صفحه دست‌ِکم سه غلط داشته باشد

$$\sum_{n=3}^{\infty} P(n) = 1 - (1 + 1 + \frac{1}{2}) e^{-1} \approx 0.08. \tag{۶۴.۲}$$

به عنوانِ تمرین همین مسئله را با استفاده از توزیعِ دوجمله‌ای حل کنید. برایِ حلِ مسئله لازم است تخمینی از تعدادِ کلماتِ کتاب داشته باشیم. فرض کنید هر صفحه‌یِ کتاب ۲۴ خط دارد و هر خط به طورِ متوسط ۲۰ کلمه.

مثال ۴.۱.۲. یک مسابقه بخت‌آزمایی (لاتاری) با یک میلیون بلیط با ۱۰۰ بلیط برنده در نظر بگیرید.

الف_ اگر ۱۰۰ بلیط بخریم شانسِ بردمان یعنی این که حداقل یک بلیط برنده داشته باشیم، چه‌قدر است؟ در این مساله $p = \frac{100}{10^6} = 10^{-4}$ است. چون تعدادِ آزمایش $N = 100$ است $\mu = Np = 10^{-2}$ می‌شود. احتمالِ باختِ‌مان

$$P(0) = \frac{\mu^0}{0!}\mathrm{e}^{-\mu} = \mathrm{e}^{-0.01} \approx 0.99005. \tag{۶۵.۲}$$

بنا بر این احتمالِ آن‌که حداقل یک بلیطِ برنده داشته باشیم

$$\sum_{n=1}^{100} P(n) = 1 - P(0) \approx 0.00995. \tag{۶۶.۲}$$

احتمالِ آن‌که دقیقاً یک بلیطِ برنده و دقیقاً دو بلیط برنده داشته باشیم

$$\begin{aligned} P(1) &= \frac{\mu^1}{1!}\mathrm{e}^{-\mu} = \frac{\mathrm{e}^{-0.01}}{100} \approx 0.00990, \\ P(2) &= \frac{\mu^2}{2!}\mathrm{e}^{-\mu} = \frac{\mathrm{e}^{-0.01}}{10^4} \approx 0.000005. \end{aligned} \tag{۶۷.۲}$$

بنا بر این اگر خیلی هم خوش شانس باشیم همان یک بلیط برنده را داریم.

این نتیجه‌ها را از توزیعِ دوجمله‌ای هم می‌شد به دست آورد. این‌که با خرید ۱۰۰ بلیط باز هم بازنده باشیم

$$P(0) = \frac{100!}{0!100!}\left(\frac{1}{10000}\right)^0\left(\frac{9999}{10000}\right)^{100} = 0.99005. \tag{۶۸.۲}$$

و این که دقیقاً یک بلیط و دو بلیط برنده داشته باشیم

$$P(1) = \frac{100!}{1!99!}\left(\frac{1}{10000}\right)^1\left(\frac{9999}{10000}\right)^{99} = 0.00990, \tag{۶۹.۲}$$

$$P(2) = \frac{100!}{2!98!}\left(\frac{1}{10000}\right)^2\left(\frac{9999}{10000}\right)^{98} = 0.000005 \tag{۷۰.۲}$$

ب ــ حداقل چند بلیط، $N'$، باید خرید تا با اطمینانِ ۹۵ درصد یک بلیط برنده داشته باشیم؟
برایِ این‌که چنین اتفاقی بیفتد

$$P(1) + P(2) + \cdots \geq 0.95. \tag{۷۱.۲}$$

این محاسبه را می‌توان به محاسبه‌یِ ساده‌تری تبدیل کرد. این‌که احتمالِ داشتنِ حداقل یک بلیطِ برنده بالایِ 0.95 باشد معادلِ این است که احتمالِ بازنده‌شدن کم‌تر از ۵ درصد باشد. پس

$$P(0) = \mathrm{e}^{-\mu'} = \mathrm{e}^{(-10^{-4}N')} \leq 0.05 \quad \Rightarrow \quad N' \geq 29958. \tag{۷۲.۲}$$

### ۵.۱.۲ جمعِ دو متغیرِ تصادفی

گاهی به جایِ یک متغیرِ تصادفی چند متغیرِ تصادفی داریم و لازم است عملیاتی با آن‌ها انجام دهیم. ساده‌ترین حالت این است که دو متغیرِ تصادفی با یک توزیع داشته باشیم و عملیات هم جمع باشد.

#### ۱.۵.۱.۲ جمعِ دو متغیرِ تصادفی‌یِ پواسون

دو متغیرِ تصادفی‌یِ $n$ و $m$ با توزیعِ پواسون را در نظر بگیرید

$$P_\mu(m) = \frac{\mu^m}{n!}\mathrm{e}^{-\mu}, \tag{۷۳.۲}$$

$$P_\lambda(n) = \frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}. \tag{۷۴.۲}$$

در این‌صورت توزیعِ $s = m + n$ عبارت است از

$$P_{\text{sum}}(s) = \sum_{m=0}^{\infty} P_\mu(m) P_\lambda(s-m) \tag{۷۵.۲}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} P_\mu(m) P_\lambda(n) \delta_{m+n,s} \tag{۷۶.۲}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^m \lambda^n}{m!n!} \mathrm{e}^{-(\mu+\lambda)} \delta_{m+n,s} \tag{۷۷.۲}$$

$$= \sum_{m=0}^{s} \frac{\mu^m \lambda^{s-m}}{m!(s-m)!} \mathrm{e}^{-(\mu+\lambda)} \tag{۷۸.۲}$$

$$= \frac{(\mu+\lambda)^s}{s!} \mathrm{e}^{-(\mu+\lambda)}, \tag{۷۹.۲}$$

که یک توزیعِ پواسون است. بنا بر این

$$\langle s \rangle = \mu + \lambda = \langle m \rangle + \langle n \rangle, \tag{۸۰.۲}$$

$$\mathfrak{V}ar(s) = \mathfrak{V}ar(m) + \mathfrak{V}ar(n) = \mu + \lambda. \tag{۸۱.۲}$$

## ۲.۲ متغیرهایِ تصادفی‌یِ پیوسته

ما تا این‌جا در موردِ متغیرِ تصادفی‌یِ گسسته صحبت کردیم. اما متغیرِ تصادفی می‌تواند کمیتی پیوسته باشد. در حالی‌که یک متغیرِ تصادفی‌یِ گسسته تنها می‌تواند مقادیرِ گسسته داشته باشد، یک متغیرِ تصادفی‌یِ پیوسته می‌تواند مقادیرِ حقیقی اختیار کند. ممکن است دامنه‌یِ این مقادیرِ حقیقی محدود یا نامحدود باشد. احتمالِ یک متغیرِ تصادفی‌یِ پیوسته معنی ندارد. احتمالِ آن‌که متغیرِ تصادفی‌یِ $X$ مقداری بینِ $x$ و $x + \mathrm{d}x$ باشد، $p(x)\,\mathrm{d}x$ است، که $p(x)$ که اسمش را چگالی‌یِ احتمال[1] می‌گذاریم مقداری مثبت، حقیقی و انتگرال‌پذیر است. رویِ اندازه‌یِ چگالی‌یِ شرطی نیست، می‌تواند هر مقدار مثبت (حتی مقداری نامتناهی در یک نقطه) داشته باشد. فقط کافی است که انتگرال‌پذیر باشد و انتظار داریم انتگرالِ آن رویِ همه‌یِ مقادیرِ ممکنِ $x$ برابر با یک باشد، مثلاً

$$P(-\infty \le X \le \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{۸۲.۲}$$

در این‌صورت احتمالِ آن‌که متغیرِ تصادفی‌یِ $X$ مقداری بینِ $a$ و $b$ باشد،

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x, \tag{۸۳.۲}$$

است. با توجه به این‌که $p(x) \ge 0$ است، تابعِ انباشته‌یِ[2]

$$F(x) := P(-\infty \le X \le x) = \int_{-\infty}^{x} p(x')\,\mathrm{d}x' \tag{۸۴.۲}$$

[1] PDF (Probability Density Function)
[2] Cumulative

تابعی غیرِ نزولی یا یک‌نوایِ صعودی[۱] است، با این خواص که

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \qquad (۸۵.۲)$$

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = 1. \qquad (۸۶.۲)$$

به تابعِ $F(x)$ تابعِ توزیعِ انباشتی [۲] می‌گویند. اما با تعریفِ بالا

$$p(x) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}, \qquad (۸۷.۲)$$

یعنی $F(x)$ از سمتِ چپ مشتق‌پذیر است.

با این تعریف تابعِ $F(x)$ علی‌الاصول خوش‌رفتارتر از $p(x)$ است. مثلاً اگر تابعِ $p(x)$ در ناحیه‌ای تابعِ دلتا باشد، $F(x)$ در آن ناحیه تابعِ پله خواهد بود. هر چند تابعِ $p(x)$ کافی است حقیقی و مثبت باشد و شرطی رویِ اندازه‌اش نیست، تابعِ $F(x) \leq 1$ است.

### ۱.۲.۲ تابعِ مولد برایِ متغیرِ تصادفیِ پیوسته

شبیهِ بحثی که در موردِ متغیرهایِ تصادفیِ گسسته داشتیم، اینجا هم می‌توانیم از روشِ تابعِ مولد استفاده کنیم. تابعِ مولدِ $M(u)$ یا تابعِ مولدِ ممان‌ها[۳] با

$$M(u) := \langle \exp(uX) \rangle \qquad (۸۸.۲)$$

$$= 1 + \sum_{n=1} \frac{\langle X^n \rangle}{n!} u^n \qquad (۸۹.۲)$$

تعریف می‌شود، که با مقایسه با

$$M(u) = \sum_{n=0} \frac{\mathrm{d}^n M(u)}{\mathrm{d}u^n}\Big|_{u=0} \frac{u^n}{n!}, \qquad (۹۰.۲)$$

نتیجه می‌شود

$$\langle X^k \rangle = \frac{\mathrm{d}^n M(u)}{\mathrm{d}u^n}\Big|_{u=0}. \qquad (۹۱.۲)$$

[۱] Monotonic increasing function
[۲] CDF(Cumulative Density Function)
[۳] Moment Generating Function

اگر به جایِ $M(u)$ از تابعِ $K(u) = \ln M(u)$ که تابعِ مولدِ انباشتک‌ها[۱] نامیده می‌شود، استفاده کنیم

$$\kappa_n = \frac{\mathrm{d}^n K(u)}{\mathrm{d}u^n}\Big|_{u=0}. \tag{۹۲.۲}$$

می‌توان نشان داد

$$\kappa_0 = 0, \tag{۹۳.۲}$$

$$\kappa_1 = \langle X\rangle, \tag{۹۴.۲}$$

$$\kappa_2 = \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2, \tag{۹۵.۲}$$

$$\kappa_3 = \langle X^3\rangle - 3\langle X\rangle\langle X^2\rangle + 2\langle X\rangle^3, \tag{۹۶.۲}$$

$$\kappa_4 = \langle X^4\rangle - 4\langle X\rangle\langle X^3\rangle + 12\langle X\rangle^2\langle X\rangle^2 - 6\langle X\rangle^4, \tag{۹۷.۲}$$

$$\vdots$$

اگر $u$ در رابطه‌یِ (۸۸.۲) را متغیری موهومی بگیریم، نتیجه تبدیلِ فوریه‌یِ چگالی‌یِ احتمال است

$$\tilde{p}(k) = \langle \exp(-ikX)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-ikx} p(x), \tag{۹۸.۲}$$

به $\tilde{p}(k)$ تابعِ مشخصه[۲] هم می‌گویند.

### ۲.۲.۲ تابعِ یک متغیرِ تصادفی

تابعِ یک متغیرِ تصادفی $Y = F(X)$ هم متغیری تصادفی است. می‌خواهیم ببینیم که توزیعِ احتمالِ متغیرِ تصادفی‌یِ جدید $p_Y(y)$ چیست؟

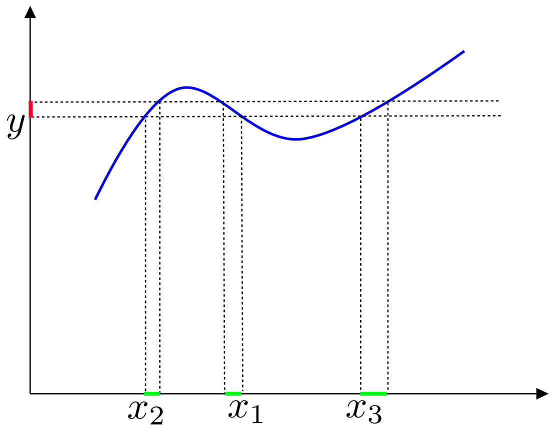
بسته به این‌که $Y$ چه تابعی از $X$ باشد ممکن است به ازایِ چند مقدار از $X$ یک مقدارِ $Y$ داشته باشیم. در این‌صورت احتمالِ آن که $Y$ بین $y$ و $y + \mathrm{d}y$ باشد، جمعِ چند احتمال است

$$p_Y(y)\mathrm{d}y = \sum_i p_X(x_i)|\mathrm{d}x_i| \tag{۹۹.۲}$$

---

[۱] Cumulant Generating Function

[۲] Characteristic Function




$$p_Y(y) = \sum_i \frac{p_X(x_i)}{\left(|\mathrm{d}y/\mathrm{d}x|\right)\big|_{x_i}} \qquad (۱۰۰.۲)$$

علامتِ قدرِ مطلق به این خاطر است که به ازایِ یک مقدارِ مثبتِ $\mathrm{d}y$ بعضی از $\mathrm{d}x_i$ها منفی هستند. شکل را ببینید. با استفاده از این خاصیتِ تابعِ دلتا

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{\left(|\mathrm{d}f/\mathrm{d}x|\right)\big|_{x_i}}\,\delta(x - x_i), \qquad (۱۰۱.۲)$$

می‌رسیم به

$$p_Y(y) = \int \mathrm{d}x p_X \delta(y(x)) = \langle \delta(y - F(x)) \rangle. \qquad (۱۰۲.۲)$$

### ۳.۲.۲ توزیعِ نرمال (گاوسی)

توزیعِ نرمال یا گاوسی با

$$p(x) = C\mathrm{e}^{-\alpha x^2}, \qquad (۱۰۳.۲)$$

تعریف می‌شود. با شرطِ بهنجارش ثابتِ $C = \sqrt{\alpha/\pi}$ می‌شود. ممان‌هایِ با توانِ زوج از متغیرِ تصادفیِ $X$ برایِ $n \geq 1$ عبارت‌اند از

$$\langle X^{2n} \rangle = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x^{2n} \mathrm{e}^{-\alpha x^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{(2\alpha)^n}$$

$$=\frac{(2n-1)!!}{(2\alpha)^n}. \tag{۱۰۴.۲}$$

تمامِ ممان‌هایِ فرد صفر هستند. واریانس $\frac{1}{2\alpha}$ و همان‌طور که پیداست بقیه‌یِ ممان‌هایِ زوج فقط تابعی از $\alpha$ یا به تعبیری تابعی از واریانس هستند. با یک انتقال در $X \to X-\mu$ و تغییرِ متغیرِ

$$\sigma := \sqrt{\frac{1}{2\alpha}}, \tag{۱۰۵.۲}$$

تابعِ توزیعِ نرمال می‌شود

$$p(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}}\, \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \tag{۱۰۶.۲}$$

و از این‌جا با تعریفِ $\delta X := X-\mu$

$$\langle \delta X\rangle = 0, \tag{۱۰۷.۲}$$
$$\langle (\delta X)^2\rangle = \sigma^2, \tag{۱۰۸.۲}$$
$$\langle (\delta X)^3\rangle = 0, \tag{۱۰۹.۲}$$
$$\langle (\delta X)^4\rangle = \sigma^4, \tag{۱۱۰.۲}$$
$$\vdots$$

یا با جای‌گذاری می‌رسیم به

$$\langle X\rangle = \mu, \tag{۱۱۱.۲}$$
$$\langle X^2\rangle = \mu^2+\sigma^2, \tag{۱۱۲.۲}$$
$$\langle X^3\rangle = \mu^3+3\mu\sigma^2, \tag{۱۱۳.۲}$$
$$\langle X^4\rangle = \mu^4+6\mu^2\sigma^2+3\sigma^4, \tag{۱۱۴.۲}$$
$$\vdots$$

تابعِ توزیعِ نرمال در معادله‌یِ زیر صدق می‌کند

$$\sigma^2 \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + (x-\mu)p(x) = 0 \qquad (۱۱۵.۲)$$

تابعِ انباشتک

$$\begin{aligned} F(x) =& P(X \leq x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}x' \exp\left[-\frac{(x'-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \\ =& \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)\right] \end{aligned} \qquad (۱۱۶.۲)$$

که در این‌جا از تعریفِ تابعِ خطا استفاده کرده‌ایم

$$\mathrm{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} \mathrm{d}x' \mathrm{e}^{-x'^2}. \qquad (۱۱۷.۲)$$

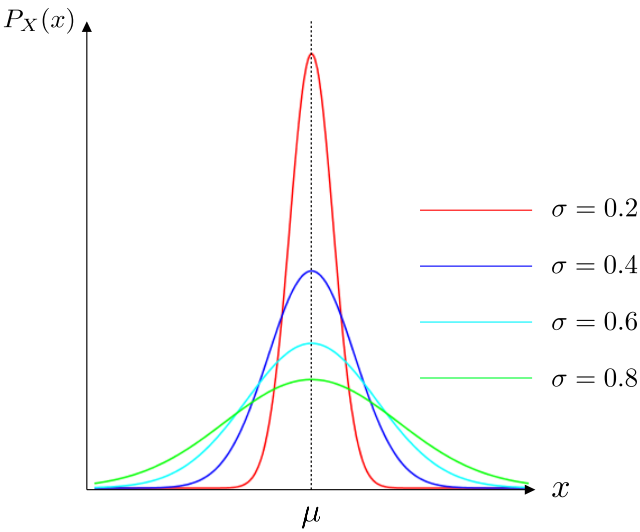
توجه داریم که

$$F(-\infty) = 0, \quad F(\mu) = 1/2, \quad F(\infty) = 1. \qquad (۱۱۸.۲)$$

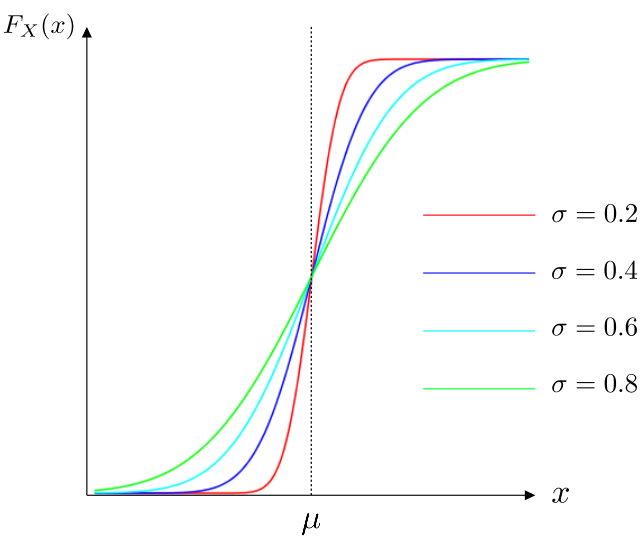
همان‌طور که در شکلِ ۲.۲ می‌بینید، تابعِ توزیعِ نرمال برای چهار مقدار مختلفِ $\sigma$ کشیده شده و در شکلِ ۳.۲ تابعِ انباشتک مربوط به توزیعِ نرمال برای چهار مقدار مختلفِ $\sigma$ کشیده شده است. هر چه $\sigma$ کوچک‌تر باشد، تابعِ توزیع باریک‌تر و بلندتر است، اما سطحِ زیر هر چهار منحنیِ توزیع برابر با یک است و توزیع‌ها بهنجار هستند. می‌توان نشان داد که سطحِ زیرِ منحنیِ تابع توزیع برایِ $x \in [\mu-\sigma, \mu+\sigma]$، $0.98$ است، یعنی در یک توزیعِ نرمال ۹۸ درصدِ اوقات متغیرِ تصادفی تفاوتش با مقدارِ میانگین کوچک‌تر یا مساویِ $\sigma$ است. در $\%99.7$ اوقات $x \in [\mu-3\sigma, \mu+3\sigma]$ است. به $\sigma$ انحرافِ معیار[۱] می‌گویند. در جدولِ ۴.۲، تابعِ خطا برایِ مقادیرِ مختلفِ $x$ داده شده است. با استفاده از این جدول می‌توانیم $P(x_1 \leq x \leq x_2)$ را می‌توانیم به دست آوریم. طبقِ تعریف

$$\begin{aligned} P(x_1 \leq x \leq x_2) =& \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, p(x) = F(x_2) - F(x_1) \\ =& \frac{1}{2}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{x_2-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{x_1-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)\right] \end{aligned} \qquad (۱۱۹.۲)$$

[۱] standard deviation




شکل ۲.۲ توزیعِ نرمال برای چهار مقدار مختلفِ $\sigma$.




شکل ۳.۲ تابعِ انباشتک مربوط به توزیعِ نرمال برای چهار مقدار مختلفِ $\sigma$.

$$\text{erf}\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-y^2/2}dy$$

| $x$ | erf($x$) | $x$ | erf($x$) | $x$ | erf($x$) | $x$ | erf($x$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.05 | 0.01994 | 0.80 | 0.28814 | 1.55 | 0.43943 | 2.30 | 0.48928 |
| 0.10 | 0.03983 | 0.85 | 0.30234 | 1.60 | 0.44520 | 2.35 | 0.49061 |
| 0.15 | 0.05962 | 0.90 | 0.31594 | 1.65 | 0.45053 | 2.40 | 0.49180 |
| 0.20 | 0.07926 | 0.95 | 0.32894 | 1.70 | 0.45543 | 2.45 | 0.49286 |
| 0.25 | 0.09871 | 1.00 | 0.34134 | 1.75 | 0.45994 | 2.50 | 0.49379 |
| 0.30 | 0.11791 | 1.05 | 0.35314 | 1.80 | 0.46407 | 2.55 | 0.49461 |
| 0.35 | 0.13683 | 1.10 | 0.36433 | 1.85 | 0.46784 | 2.60 | 0.49534 |
| 0.40 | 0.15542 | 1.15 | 0.37493 | 1.90 | 0.47128 | 2.65 | 0.49597 |
| 0.45 | 0.17364 | 1.20 | 0.38493 | 1.95 | 0.47441 | 2.70 | 0.49653 |
| 0.50 | 0.19146 | 1.25 | 0.39435 | 2.00 | 0.47726 | 2.75 | 0.49702 |
| 0.55 | 0.20884 | 1.30 | 0.40320 | 2.05 | 0.47982 | 2.80 | 0.49744 |
| 0.60 | 0.22575 | 1.35 | 0.41149 | 2.10 | 0.48214 | 2.85 | 0.49781 |
| 0.65 | 0.24215 | 1.40 | 0.41924 | 2.15 | 0.48422 | 2.90 | 0.49813 |
| 0.70 | 0.25804 | 1.45 | 0.42647 | 2.20 | 0.48610 | 2.95 | 0.49841 |
| 0.75 | 0.27337 | 1.50 | 0.43319 | 2.25 | 0.48778 | 3.00 | 0.49865 |

شکل ۴.۲ جدولِ تابعِ خطا.

تابعِ مولد

$$M(u) := \langle \exp(uX)\rangle = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + ux\right], \quad (۱۲۰.۲)$$

$$= \exp\left[\mu u + \frac{\sigma^2 u^2}{2}\right], \quad (۱۲۱.۲)$$

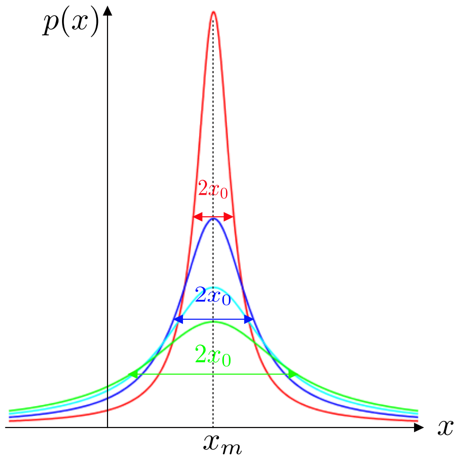
و

$$K(u) = \ln M(u) = \mu u + \frac{\sigma^2 u^2}{2} \quad (۱۲۲.۲)$$

پس بسطِ تیلورِ $K(u)$ فقط دو جمله دارد

$$\kappa_1 = \langle X\rangle = \mu, \quad (۱۲۳.۲)$$

$$\kappa_2 = \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2 = \sigma^2, \quad (۱۲۴.۲)$$




$$\kappa_n = 0, \qquad n \neq 1, 2. \tag{۱۲۵.۲}$$

تابعِ مشخصه‌یِ توزیعِ نرمال

$$\begin{aligned}\tilde{p}(k) =& \langle \exp(-ikX) \rangle = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \mathrm{e}^{-ikx} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \\ =& M(-ikX) \\ =& \exp\left[-i\mu k - \frac{\sigma^2 k^2}{2}\right]\end{aligned} \tag{۱۲۶.۲}$$

### ۴.۲.۲ توزیعِ کوشی

توزیعِ کوشی[۱] با

$$p(x) = \frac{1}{\pi \, x_0 (1 + (x - x_m)^2 / x_0^2)} \tag{۱۲۷.۲}$$

تعریف می‌شود، که $x_m$ جایی است که توزیع بیشینه می‌شود و $x_0$ نصفِ پهنایِ توزیع است وقتی دامنه‌یِ تابعِ توزیع نصفِ دامنه‌یِ بیشینه است. به سادگی می‌توانیم نشان دهیم این توزیع بهنجار است. احتمالِ در $x = x_m$ بیشینه است و میانگینِ آن

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \, \mathrm{d}x}{\pi \, x_0 (1 + (x - x_m)^2 / x_0^2)}. \tag{۱۲۸.۲}$$

[۱] Cauchy distribution

است. ممکن است استدلال شود که انتگرال‌ده نسبت به $x_m$ فرد و نتیجه انتگرال زوج و مقدارِ آن در دو حدِّ داده شده برابر و میانگینِ متغیرِ تصادفی همان بیشینه‌یِ تابعِ توزیع یعنی همان $x_m$ است. این استدلال درست نیست. در واقع برایِ $x$ هایِ بزرگ انتگرالده تابعی مثلِ $1/x$ و انتگرالِ آن $\ln|x|$ می‌شود. بنا بر این نتیجه انتگرال تفاضلِ دو بی‌نهایت است که نامعین است. البته اگر میانگینِ $\langle X\rangle$ را به جایِ ۱۲۸.۲ برایِ $x_m = 0$ با مقداراساسی‌یِ انتگرال[1] تعریف کنیم

$$\langle X\rangle := \lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\pi\,x_0(1+x^2/x_0^2)} = 0, \tag{۱۲۹.۲}$$

بگیریم ظاهراً مشکل برطرف می‌شود. اما برای ممانِ دوم

$$\langle X^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\pi\,x_0(1+x^2/x_0^2)}, \tag{۱۳۰.۲}$$

هنوز مشکل برقرار است و برایِ $x$ هایِ بزرگ انتگرالده ثابت و انتگرالِ آن بی‌نهایت می‌شود. بنا بر این برایِ توزیعِ کوشی میانگین نامعین و واریانس بی‌نهایت است.

مثال ۱.۲.۲. رویِ صفحه‌ای بسیار بزرگ چشمه‌ای در مبدا قرار دارد. از این چشمه به طور یک‌نواخت ذرات در همه‌یِ جهات ساطع می‌شوند. پس چگالی‌یِ احتمالِ آن‌که ذره‌ای بینِ $\theta$ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ ساطع شود ثابت است. از شرطِ بهنجار بودنِ احتمال نتیجه می‌شود، چگالی‌یِ احتمال در ناحیه‌یِ زیر غیرِصفر است

$$p(\theta) = \frac{1}{\pi}, \qquad -\pi/2 \le \theta \le \pi/2. \tag{۱۳۱.۲}$$

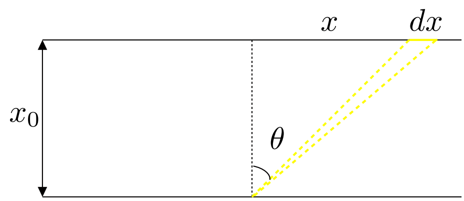
ذره‌ای که در زاویه $\theta$ ساطع شده باشد، رویِ صفحه‌ای آشکارساز موازی‌یِ صفحه‌یِ اول (شکل را ببینید) در نقطه‌ای مثلِ $x$ به صفحه می‌خورد که

$$x = x_0\,\tan\theta. \tag{۱۳۲.۲}$$

با استفاده از (۹۹.۲) توزیعِ $x$ از رابطه‌یِ زیر به دست می‌آید

$$p(x) = \frac{p(\theta)}{|\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta|} = \frac{1}{\pi\,x_0(1+x^2/x_0^2)}. \tag{۱۳۳.۲}$$

[1] Principal value of the integral




## ۵.۲.۲ توزیعِ نمایی

متغیرِ تصادفیِ $X$ توزیعی نمایی[۱] دارد، اگر

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & 0 \leq x < \infty, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

در این‌صورت تابعِ انباشتک

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & 0 \leq x < \infty \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{۱۳۴.۲}$$

با استفاده از این‌ها

$$\langle X \rangle = \frac{1}{\lambda}, \tag{۱۳۵.۲}$$

$$\langle X^2 \rangle = \frac{2}{\lambda^2}, \tag{۱۳۶.۲}$$

$$\vdots \tag{۱۳۷.۲}$$

$$\langle X^n \rangle = \frac{n!}{\lambda^n}. \tag{۱۳۸.۲}$$

و واریانس

$$\mathfrak{V}ar(X) = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{۱۳۹.۲}$$

### ۱.۵.۲.۲ بدونِ حافظه‌بودنِ توزیعِ نمایی

در بیش‌ترِ پدیده‌ها ما شاهدِ چیزی شبیهِ حافظه هستیم، یعنی رخ‌دادنِ روی‌دادی در یک زمانِ

[۱] Exponential distribution

خاص به گذشته مربوط است. آیا پدیده‌هایی هم هستند که حافظه نداشته باشند؟ برایِ این‌کار باید تعریفی کمّی از حافظه داشته باشیم. توزیعِ احتمالِ متغیرِ تصادفیِ $T$ بدون حافظه است، اگر برای هر عددِ حقیقیِ غیرِمنفیِ $t$ و $s$ داشته باشیم

$$P(T > t + s|T > s) = P(T > t). \tag{۱۴۰.۲}$$

برایِ این‌که معنایِ این رابطه را بهتر بفهمیم بیایید تابعِ بقاء را به صورتِ زیر تعریف کنیم

$$S(t) := P(T > t) = 1 - F(t). \tag{۱۴۱.۲}$$

اگر $T$ را مثلاً زمانِ نابودی یا مرگِ موجودی بگیریم، این تابع معرفِ احتمالِ چیزهایی مثلِ زنده‌ماندنِ یک بیمار، یا سالم‌ماندنِ یک دستگاه برایِ یک زمانِ مشخص است. چون تابعِ انباشتِ $F(t)$ تابعیِ یک‌نوایِ صعودی است، تابعِ $S(t)$ تابعیِ یک‌نوایِ نزولی است. پس

$$P(T > t + s \cap T > t) = P(T > t + s). \tag{۱۴۲.۲}$$

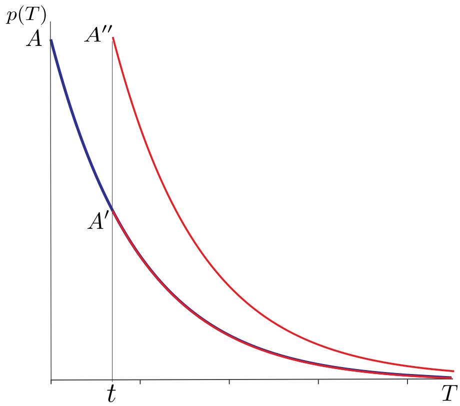
حالا اگر از قاعده‌یِ بیز استفاده کنیم، اثباتِ رابطه‌یِ ۱۴۰.۲ برایِ توزیعِ نمایی ساده است

$$\begin{aligned} P(T > t + s|T > s) =& \frac{P(T > t + s \cap T > t)}{P(T > s)} \\ =& \frac{P(T > t + s)}{P(T > s)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+s)}}{\mathrm{e}^{-\lambda s}} = \mathrm{e}^{-\lambda t} \\ =& P(T > t). \end{aligned} \tag{۱۴۳.۲}$$

در ضمن

$$\begin{aligned} \frac{P(T > t + s)}{P(T > s)} =& P(T > t) \\ S(t + s) =& S(t)S(s). \end{aligned} \tag{۱۴۴.۲}$$

اگر $T$ را زمانِ انتظار تا رخ‌دادنِ یک روی‌داد در نظر بگیریم، احتمالِ این‌که این زمان بزرگ‌تر از $t$ باشد همان احتمالِ شرطی‌ای است که آن روی‌داد تا زمانِ $s$ رخ‌نداده باشد و در زمانی بیش از $t + s$ رخ دهد. عکسِ قضیه‌یِ بالا هم صادق است.




شکل ۵.۲ خمِ آبی‌رنگ توزیعی نمایی برایِ متغیرِ تصادفی‌یِ $T$ است که با انتقال به اندازه‌یِ زمانِ $t$ به توزیعِ قرمز رنگ تبدیل می‌شود.

شکلِ ۵.۲ را ببینید. در این شکل خمِ آبی‌رنگ توزیعی نمایی برایِ متغیرِ تصادفی‌یِ $T$ است. بخشی از این خم مثلاً بعد از زمانِ $t$ را در نظر بگیرید که در شکل با خمی قرمز رنگ نشان داده شده است. قاعدتاً پس از این زمان تابعِ چگالی‌یِ احتمال ادامه‌یِ همان خمِ آبی است. اما سطحِ زیرِ منحنی‌یِ این بخش کم‌تر از یک است و این تابع بهنجار نیست. برایِ بهنجار کردن کافی است آن را مقیاس کنیم. با این‌کار نقطه‌یِ $A'$ به $A''$ می‌رود. بدونِ حافظه‌بودنِ توزیعِ نمایی در این‌جا به این معنی است که اگر خمِ آبی‌رنگ را به اندازه‌یِ زمانِ $t$ منتقل کنیم، نقطه‌یِ $A$ به $A''$ می‌رود.

**قضیه ۲.۲.۲** یک متغیرِ تصادفی‌یِ پیوسته با توزیعِ نمایی تنها توزیعِ پیوسته‌ی بدونِ حافظه است.

### ۶.۲.۲ جمعِ متغیرهایِ تصادفی‌یِ مستقل

جمعِ دو متغیرِ تصادفی $X = X_1 + X_2$ هم متغیری تصادفی است. می‌توان پرسید که توزیعِ احتمالِ متغیرِ تصادفی‌یِ جدید $p_X(x)$ چیست؟ چون متغیرها مستقل هستند، احتمالِ جمعِ دو

متغیر حاصلِ‌ضربِ دو احتمال است. پس

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_2 p_1(x_1)\, p_2(x_2) \delta(x - x_1 - x_2), \tag{۱۴۵.۲}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 p_1(x_1)\, p_2(x - x_1). \tag{۱۴۶.۲}$$

به زبانِ تبدیلِ فوریه یا تابعِ مشخصه گاهی مسئله ساده‌تر است. تابعِ مشخصه‌یِ تابعِ توزیعِ جدید

$$\begin{aligned}\tilde{p}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 p_1(x_1)\, p_2(x - x_1) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 \mathrm{e}^{-ikx_1} p_1(x_1) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-ik(x-x_1)} p_2(x - x_1) \\ &= \tilde{p}_1(k) \tilde{p}_2(k)\end{aligned} \tag{۱۴۷.۲}$$

حاصلِ‌ضربِ تابعِ مشخصه‌یِ دو تابعِ توزیع است. به این طریق به سادگی می‌توانید نشان دهید جمعِ دو متغیرِ تصادفیِ مستقل با توزیعِ نرمال، متغیری تصادفی با توزیعِ نرمال است.

مثال ۳.۲.۲. دو متغیرِ تصادفیِ مستقل در نظر بگیرید که با توزیعی یک‌نواخت می‌توانند هر عددی بینِ $0$ و $1$ را انتخاب کنند. پس تابعِ توزیعِ این دو متغیر چیزی مثلِ

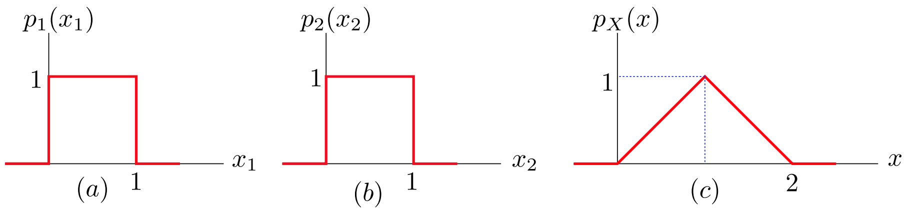
$$p_1(x_1) = \begin{cases} 1, & 0 \le x_1 \le 1, \\ 0, & \text{در غیر این صورت}, \end{cases} \tag{۱۴۸.۲}$$

است. تابعِ توزیعِ $X = X_1 + X_2$

$$p_X(x) = \int_0^1 \mathrm{d}x_1\, p_2(x - x_1). \tag{۱۴۹.۲}$$

بسته به مقدارِ $x$ مقدارِ انتگرال متفاوت خواهد بود. ساده‌تر این است که تغییرِ متغیرِ $u := x - x_1$ را انجام دهیم. در این‌صورت

$$p_X(x) = -\int_x^{x-1} \mathrm{d}u\, p_2(u) = \int_{x-1}^{x} \mathrm{d}u\, p_2(u). \tag{۱۵۰.۲}$$




شکل ۶.۲  توزیع‌هایی یک‌نواخت برایِ دو متغیرِ تصادفیِ $X_1$ و $X_2$ بین $0$ و $1$ و همین‌طور جمعِ این دو متغیرِ تصادفی.

اگر $x \le 2$ یا $0 \le x$ باشد، انتگرالِ ۱۵۰.۲ و بنا بر این تابعِ توزیع صفر است. اگر $0 \le x \le 1$ باشد، حدِ پایینِ انتگرالِ ۱۵۰.۲ منفی است. تنها بخشی که در نتیجه سهم دارد وقتی است که حدِ پایینِ انتگرال صفر است

$$p_X(x) = \int_0^x \mathrm{d}u = x. \qquad (۱۵۱.۲)$$

اگر $2 \le x \le 1$ باشد، حدِ بالایِ انتگرالِ ۱۵۰.۲، $x$ است. تنها بخشی که در نتیجه سهم دارد وقتی است که حدِ بالایِ انتگرال ۱ است

$$p_X(x) = \int_{x-1}^1 \mathrm{d}u = 2 - x. \qquad (۱۵۲.۲)$$

پس

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x, & 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2, \\ 0, & 2 \le x. \end{cases} \qquad (۱۵۳.۲)$$

## ۳.۲ قضیه‌یِ حدِّ مرکزی

قضیه ۱.۳.۲ اگر $N$ متغیرِ تصادفیِ $X_1, \cdots, X_N$ که توزیع‌هایِ یک‌سانی دارند با متوسطِ $\mu$ و واریانس $\sigma$ باشند، حاصلِ جمع‌شان در حدِّ $N$ هایِ بزرگ متغیری تصادفی با توزیعِ نرمال است.

متغیرِ تصادفیِ

$$Z_N = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N - N\mu}{\sqrt{N}\sigma} \tag{۱۵۴.۲}$$

توزیعی نرمال با متوسطِ صفر و واریانسِ $1$ است. مهم نیست که توزیع‌هایِ اولیه چه باشند، فقط باید متوسطشان معین و واریانسِ شان محدود باشد. مثلا این قضیه برایِ جمعِ تعدادِ زیادی متغیرِ تصادفی با توزیعی یک‌نواخت بینِ $0$ و $1$ برقرار و حاصلِ جمع‌شان توزیعی نرمال است. اما این قضیه برای جمعِ تعدادِ زیادی متغیرِ تصادفی با توزیعِ کوشی درست نیست.

مثال ۲.۳.۲. متغیریِ تصادفی با توزیعی یک‌نواخت مطابقِ ۱۴۸.۲ در نظر بگیرید. در مثالِ ۳.۲.۲ حمعِ دو متغیرِ تصادفی از این نوع توزیع را دیدیم. با جمعِ سه، چهار، پنج و شش نوع از این توزیع، توزیع‌هایی به دست می‌آیند که در شکلِ ۷.۲ می‌بینید.

مثال ۳.۳.۲. فرض کنید $n$ متغیرِ تصادفیِ $X_1, \cdots, X_n$ با توزیع‌هایِ یک‌سانِ نرمال، متوسطِ $\langle X_i \rangle = \mu$ و واریانس $\sigma$ باشند. می‌خواهیم نشان دهیم متغیرِ تصادفیِ

$$Z_N = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N - N\mu}{\sqrt{N}} \tag{۱۵۵.۲}$$

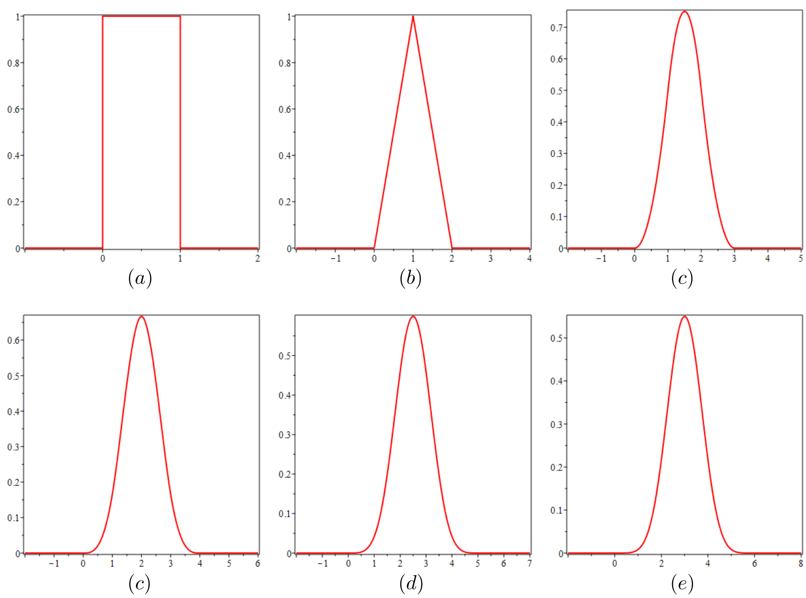
توزیعی نرمال با متوسطِ صفر و واریانسِ $1$ است.

$$\langle Z_N \rangle = \frac{\langle X_1 \rangle + \langle X_2 \rangle + \cdots + \langle X_N \rangle - N\mu}{\sqrt{N}} = 0 \tag{۱۵۶.۲}$$

با استفاده از (۱۲۶.۲) و (۱۴۷.۲) تابعِ مشخصه‌یِ متغیرِ تصادفیِ $Z$ عبارت است از

$$\tilde{p}(k) = \exp\left[-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right] \tag{۱۵۷.۲}$$

که تابعِ مشخصه توزیعی نرمال با واریانس $\sigma$ است.



شکل ۷.۲ $(a)$ توزیعی یک‌نواخت برایِ متغیری تصادفی بین $0$ و $1$ است. در بخش‌هایِ $(b)$ تا $(e)$ حمعِ دو تا شش متغیرِ تصادفی با همین توزیع را می‌بینید.

## ۴.۲ سنجشِ احتمال

وقتی یک دستگاه دو حالته با احتمال‌هایِ

$$P(A) = p \tag{۱۵۸.۲}$$

و

$$P(B) = 1 - p =: q \tag{۱۵۹.۲}$$

را بررسی می‌کردیم، این احتمال‌ها را داده‌شده و معین گرفتیم. اما می‌توان سوال کرد چه‌طور می‌شود این‌ها را سنجید. مثلاً برایِ یک سکه از کجا می‌دانیم که احتمالِ شیر یا خط آمدن چه‌قدر است. گاهی ممکن است یک دلیلِ نظری برایِ اندازه‌یِ احتمال داشته باشیم. مثلاً با فرضِ تقارن بدانیم برایِ یک سیستمِ دوحالته، احتمالِ هر دو حالت برابر است. مثلاً اگر یک سکه‌یِ کاملاً متقارن داشته باشیم (که این‌هم به سادگی قابلِ تحقیق نیست). ممکن است ادعا شود احتمال شیر آمدن با احتمالِ خط آمدن برابر است. اما برایِ یک سکه معمولی می‌بینیم که کاملاً متقارن نیست. نقش‌ها و برجستگی‌هایِ دو طرف یکی نیست. جواب مرسوم این است که اگر سکه را به کرات پرتاب کنیم، احتمالِ شیرآمدن $p = \dfrac{n}{N}$ است که $N$ تعدادِ کلِ پرتاب‌ها و $n$ تعدادِ پرتاب‌هایی است که شیر آمده است. معمولاً به این نکته نیز تاکید می‌شود که این نتیجه در صورتی درست است که $N$ تعدادِ کلِ پرتاب‌ها خیلی زیاد باشد، یعنی $p = \lim_{N\to\infty} \dfrac{n}{N}$. اما بگذارید این گزاره را کمّی کنیم. ما واقعاً بی‌نهایت‌بار که اندازه‌گیری نمی‌کنیم. وقتی تعدادِ کلِ پرتاب‌ها محدود باشد، معنیِ آن‌چیزی که ما به دست می‌آوریم واقعاً چیست؟ در واقع اگر احتمالِ شیر آمدن $p = x$ را می‌دانستیم، احتمالِ آن‌که از $N$ پرتاب، $n$ پرتاب شیر بیاید،

$$P_N(n|x) := \binom{N}{n} x^n (1-x)^{N-n} \tag{۱۶۰.۲}$$

یک احتمالِ شرطی است، مشروط به معین بودنِ $x$. حالا می‌توانیم از قاعده‌یِ بیز استفاده کنیم

$$p_N(x|n) = \frac{P_N(n|x)p(x)}{P_N(n)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{P_N(n|x)p(x)}{\int_0^1 \mathrm{d}y\, P_N(n|y)p(y)} \\
&= \frac{x^n(1-x)^{N-n}p(x)}{\int_0^1 \mathrm{d}y\, y^n(1-y)^{N-n}p(y)}
\end{aligned}
\qquad (۱۶۱.۲)
$$

که $p(x)$ توزیعِ احتمال برایِ متغیرِ $x$ (احتمالِ شیرآمدن) است. در واقع ما احتمالِ شیرآمدن را نمی‌دانیم ولی می‌خواهیم ببینیم اگر پس از $N$ پرتاب، $n$ پرتاب شیر بیاید، چه اطلاعاتی در موردِ توزیعِ احتمالِ $x$ یافته‌ایم. اگر قبل از سنجش هیچ چیز در موردِ $x$، احتمالِ شیرآمدن، نداشته باشیم، توزیعِ $p(x)$ کاملاً یک‌نواخت است، یعنی

$$
p(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{در غیرِ این‌صورت} \end{cases} \qquad (۱۶۲.۲)
$$

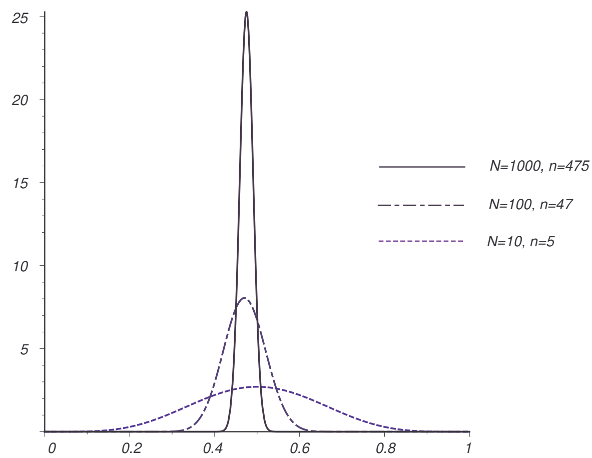
یعنی احتمالِ شیرآمدن هر عددی بینِ صفر و یک است. اگر به دلایلی از قبل اطلاعاتی در موردِ این توزیع داشته باشیم، چه آن‌که قبلاً اندازه‌گیری کرده باشیم یا دلایلی نظری (مثلاً با استفاده از تقارن) برایِ آن داشته باشیم می‌توانیم از این اطلاعات در موردِ توزیعِ $p(x)$ استفاده کنیم. با فرض این‌که هیچ چیزی در موردِ توزیعِ $x$ ندانیم، می‌رسیم به

$$
\begin{aligned}
p_N(x|n) &= \frac{x^n(1-x)^{N-n}}{\int_0^1 \mathrm{d}y\, y^n(1-y)^{N-n}} \\
&= \frac{x^n(1-x)^{N-n}}{\beta(n+1, N-n+1)}
\end{aligned}
\qquad (۱۶۳.۲)
$$

که

$$
\begin{aligned}
\beta(a,b) &= \int_0^1 \mathrm{d}x\, x^{a-1}(1-y)^{b-1} \\
&= \frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!}
\end{aligned}
\qquad (۱۶۴.۲)
$$

تابعِ بتا است. در شکلِ (۸.۲) احتمالِ شرطیِ احتمالِ شیرآمدن $p_N(x|n)$ برایِ مقادیرِ مختلفِ $N$ و $n$ رسم شده است. همان‌طور که از شکل هم پیداست هرچه تعدادِ پرتابِ سکه، $N$ را بزرگ‌تر کنیم، توزیعِ احتمالِ $p_N(x|n)$ باریک‌تر می‌شود. معنیِ این حرف این است که ناحیه‌ای که




شکل ۸.۲ توزیعِ احتمالِ شرطیِ احتمالِ شیرآمدن برایِ مقادیرِ مختلفِ $N$ و $n$.

توزیعِ احتمال برایِ $x$ مقدارش قابلِ چشم‌پوشی است بزرگ‌تر می‌شود و ما با اطمینانِ بیش‌تری در موردِ این‌که احتمالِ شیرآمدن $x$ در چه ناحیه‌است می‌توانیم حرف بزنیم. این حرف‌ها را هم می‌توان کمّی‌تر کرد. هرچند با تعدادِ محدودی اندازه‌گیری نمی‌توانیم بگوییم احتمالِ شیرآمدن دقیقاً چه‌قدر است، ولی توانستیم توزیعی برایِ این احتمال به دست آوریم. با استفاده از این توزیع و با همین تعداد اندازه‌گیری، قله‌یِ توزیع $x_m$ (یعنی جایی که احتمالِ شیر آمدن بیشینه است)، مقدارِ چشم‌داشتی (یا همان متوسطِ) احتمالِ شیر آمدن به شرطِ $n$ از $N$، $\langle x|n\rangle$، و واریانسِ این توزیع را می‌توانیم به دست آوریم.

$$\frac{\mathrm{d}p_N(x|n)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_m}=0, \quad \Rightarrow \quad x_m=\frac{n}{N} \tag{۱۶۵.۲}$$

$$\begin{aligned}\langle x|n\rangle &= \int_0^1 \mathrm{d}x\, x\, p_N(x|n) = \int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{x^{n+1}(1-x)^{N-n}}{\beta(n+1,N-n+1)}\\ &= \frac{\beta(n+2,N-n+1)}{\beta(n+1,N-n+1)} = \frac{n+1}{N+2},\\ \mathfrak{V}ar(x|n) &= \langle x^2|n\rangle - \langle x|n\rangle^2 = \frac{\beta(n+3,N-n+1)}{\beta(n+1,N-n+1)} - \left(\frac{n+1}{N+2}\right)^2\end{aligned} \tag{۱۶۶.۲}$$

$$=\frac{N-n+1}{(N+3)(N+2)^2}. \tag{۱۶۷.۲}$$

قله‌یِ توزیع $\frac{n}{N}$، و متوسطِ آن $\frac{n+1}{N+2}$، است. در حدِّ $N\to\infty$، قله‌یِ توزیع و متوسطِ احتمال همان $\frac{n}{N}$ می‌شوند و واریانس هم به سمتِ صفر می‌رود. اگر بعد از $N=100$ پرتاب $n=47$ بار شیر آمده باشد، بیشینه احتمالِ شیرآمدن $x_m=0.47$، متوسطِ احتمالِ شیرآمدن $\langle x|475\rangle=0.4706$، و واریانس $5\times10^{-5}$ است. اگر از ما سوال شود، بعد از $N=1000$ پرتاب $n=475$ بار شیر آمده است، با احتمالِ 90 درصد احتمالِ شیر آمدن در چه ناحیه‌ای است، جواب چیست؟

## ۵.۲ اطلاعات و انتروپی

در این بخش ابتدا می‌خواهیم میزانِ اطلاع از یک روی‌داد یا مجموعه‌ای از روی‌دادها را کمّی کنیم. این کار را ما معمولاً در فیزیک انجام می‌دهیم. مفهومی را از زندگی‌یِ روزمره می‌گیریم و سعی می‌کنیم به آن مفهومی کمّی و دقیق که مشاهده‌پذیر باشد بدهیم. مثلاً در زندگی‌یِ روزمره مردم تصویری از کلمه‌یِ کار دارند. این کلمه در مکانیک به عاریه گرفته شده و مفهومی کمّی و دقیق به آن داده می‌شود. ما این‌جا می‌خواهیم همین کار را با کلمه‌یِ اطلاعات بکنیم. ایده‌یِ اصلی‌یِ نظریه‌یِ اطلاعات این است که ارزش اطلاعاتی یک اطلاع به میزانِ شگفت‌انگیز بودنِ آن اطلاع بستگی دارد. اگر یک روی‌داد بسیار محتمل باشد، وقتی آن رویداد مطابق انتظار اتفاق می افتد اصلاً غیرِمنتظره نیست. بنابراین در این حالت می‌گوییم محتوایِ اطلاعاتی کم است. اما اگر احتمالِ رخ‌دادنِ روی‌دادی اندک باشد، اگر کسی به ما بگوید آن اتفاق رخ خواهد داد، اطلاعِ زیادی به ما داده است. به عبارتِ دیگر در غیابِ هر اطلاعِ قبلی هرچه احتمالِ صحتِ گزاره‌ای بیش‌تر باشد، محتوایِ اطلاعاتی‌یِ آن گزاره کم‌تر است. مثلاً هر روزه آماری از مرگ و میر بر اثر بیماری‌یِ کرونا داده می‌شود. این آمارِ روزانه کمی افت و خیز دارد. تا وقتی این عدد با انتظارِ ما بخواند اطلاعِ کم‌تری داده شده است. اما اگر مثلا به ما بگویند فلان دارو (مثلاً آسپرین) رویِ درگیری با این بیماری این اثرِ مشخص را دارد، چیزی است که انتظارش را نداشتیم. در این صورت می‌گوییم در این حالت به ما اطلاعی داده شده است. اطلاع که آن را با $I$ نمایش می‌دهیم

به توزیعِ احتمال بستگی دارد. مثلاً در ساده‌ترین حالت یک سکه با دو حالتِ شیر و خط. اگر احتمالِ شیر آمدن یک باشد، آن روی‌داد ارزشِ اطلاعاتی ندارد. از قبل با قطعیت می‌توانیم بگوییم که آن رخ‌داد روی می‌دهد. ما می‌دانیم نیوتن در سالِ ۱۶۴۳ میلادی به دنیا آمده است. سه گزاره در موردِ روزِ تولد او به ما می‌گویند:

۱. نیوتن در یکی از روزهای سالِ ۱۶۴۳ میلادی به دنیا آمده است.

۲. نیوتن در نیمه‌یِ دوم سالِ ۱۶۴۳ میلادی به دنیا آمده است.

۳. نیوتن روزِ ۲۵ اُم یکی از ماه‌هایِ سالِ ۱۶۴۳ میلادی به دنیا آمده است.

احتمالِ گزاره‌یِ اول یک و اطلاعاتِ آن صفر است. احتمالِ گزاره‌یِ دوم $\frac{1}{2}$ و اطلاعاتِ آن کمی بیش‌تر است. احتمالِ گزاره‌یِ سوم $\frac{12}{365}$ و اطلاعاتِ آن بیش از دو گزاره‌یِ دیگر است. اگر ترکیبِ دو گزاره‌یِ دوم و سوم را در نظر بگیریم، چون احتمال‌ها مستقل هستند، احتمالِ آن‌که نیوتن در ۲۵ اُم یکی از ماه‌هایِ نیمه‌یِ دوم سالِ ۱۶۴۳ میلادی به دنیا آمده باشد،

$$\frac{12}{365} \times \frac{1}{2} = \frac{6}{365},$$

کم‌تر و محتوایِ اطلاعاتیِ آن بیش‌تر است.

متغیرِ تصادفیِ $X$ مقادیرِ $\{x_1, x_2, \cdots, x_\Omega\}$ با احتمال‌هایِ $\{P_1, P_2, \cdots, P_\Omega\}$ را می‌تواند اختیار کند. اگر در اندازه‌گیری $x_i$ رخ دهد، اطلاعِ داده‌شده را با $I_i$ نمایش می‌دهیم. فرض می‌کنیم اطلاع ویژگی‌هایِ زیر را دارد:

- اطلاع کمیتی نامنفی است.

$$I_i \geq 0 \tag{۱۶۸.۲}$$

- اطلاعِ حاصل از هر روی‌داد $I_i$ تابعِ یک‌نوایِ نزولی از احتمالِ وقوعِ آن روی‌داد $P_i$ است. هر چه احتمالِ روی‌دادی بیش‌تر باشد اطلاع از آن روی‌داد کم‌تر است.

$$I(P = 1) = 0. \tag{۱۶۹.۲}$$

- اطلاعِ حاصل از دو روی‌دادِ مستقل مجموعِ اطلاعِ حاصل از هر کدام از روی‌دادهاست.

$$I(P_1, P_2) = I(P_1) + I(P_2). \tag{۱۷۰.۲}$$

اگر دو رویداد مستقل باشند، احتمالِ رخدادنِ هر دو روی‌داد، حال‌ضربِ احتمالِ دو روی‌داد است پس ما دنبالِ تابعی هستیم که این خواص را داشته باشد

$$I(P_1 \cdot P_2) = I(P_1) + I(P_2), \qquad (۱۷۱.۲)$$

$$I(1) = 0. \qquad (۱۷۲.۲)$$

در صورتی که این فرض را هم اضافه کنیم که اطلاعات تابعِ پیوسته‌ای از احتمال باشد، تنها تابعی که این شرایط را برآورده کند،

$$I(P) = C \ln P, \qquad (۱۷۳.۲)$$

است، که $C$ مقداری ثابت است. شرطِ مثبت بودنِ $I$ نتیجه می‌دهد که ثابتِ $C := -k < 0$ باشد. پس

$$I(P) = -k \ln P, \qquad k > 0. \qquad (۱۷۴.۲)$$

تا این‌جا در موردِ اطلاعِ در موردِ رخدادنِ یک روی‌داد معین صحبت کردیم. حالا اگر اطلاعی در موردِ مجموعه‌ای از روی‌دادها داشته باشیم متوسطِ اطلاعاتِ داده‌شده عبارت است از

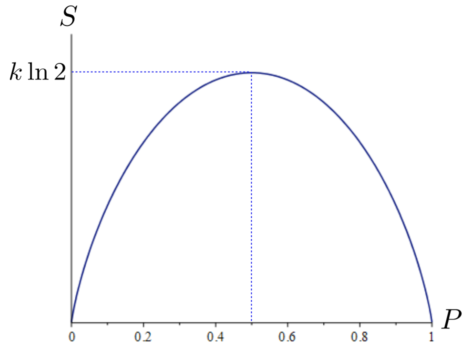
$$S := \langle I \rangle = \sum_i P_i\, I(P_i) = -k \sum_i P_i\, \ln P_i. \qquad (۱۷۵.۲)$$

در نظریه‌یِ اطلاعات متوسطِ اطلاعات را $S$ انتروپی‌یِ شانون[۱] می‌نامند. تا این‌جا هیچ شرطی رویِ اندازه‌یِ $k$ و این‌که لگاریتم در چه مبنایی است نداریم. البته این دو به هم مربوط هستند. در نظریه اطلاعات معمولاِ لگاریتم را در مبنای $2$ و ضریبِ ثابت را $1$ می‌گیرند. در مکانیکِ آماری لگاریتم را در مبنای $e$ و ضریبِ ثابت را ثابتِ بولتزمن $k_B$ می‌گیریم.

مثال ۱.۵.۲. برگردیم به مثالِ ساده‌یِ پرتابِ یک سکه. اگر سکه کاملاً متقارن باشد، انتروپی

$$S := -k \sum_i P_i \ln P_i = -k(\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}) = k \ln 2 \approx 0.6931k, \qquad (۱۷۶.۲)$$

[۱] Shannon Entropy




شکل ۹.۲ انتروپی بر حسبِ $P$ یعنی $S(P) = -k(P\ln P + (1-P)\ln(1-P))$ احتمالِ شیرآمدنِ یک سکه.

و اگر مثلاً احتمالِ شیرآمدن 0.7 باشد، پس احتمالِ خط آمدن 0.3 و انتروپی برابر است با

$$S := -k(0.7\ln 0.7 + 0.3\ln 0.3) \approx 0.6109k. \qquad (۱۷۷.۲)$$

بیایید ببینیم برایِ یک سیستمِ دو حالته چه وقت انتروپی بیشینه می‌شود

$$S(P) = -k(P\ln P + (1-P)\ln(1-P)) \qquad (۱۷۸.۲)$$
$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}P}\Big|_{P_m} = -k(\ln P_m + 1 - \ln(1-P_m) - 1)$$
$$= k\ln\left(\frac{1-P_m}{P_m}\right) = 0, \qquad (۱۷۹.۲)$$

که نتیجه می‌دهد $P_m = \frac{1}{2}$. پس برایِ سکه‌یِ متقارن که احتمالِ شیر و خط آمدن برابر است، انتروپی بیشینه است. در شکلِ ۹.۲، انتروپی بر حسبِ $P$ احتمالِ شیرآمدنِ یک سکه رسم شده است. اگر احتمالِ یکی از حالات مثلاً شیر آمدن بیش‌تر باشد، ارزشِ اطلاعاتی کم‌تری دارد. در حالتی که احتمالِ یکی از رویدادها 1 باشد، انتروپی صفر است.

بیایید چند حالت را بررسی کنیم.

- سیستمی در نظر بگیرید که بتواند $\Omega$ حالتِ مختلف یا به تعبیری $\Omega$ حالتِ دردسترس[۱] را اختیار کند. می‌خواهیم ببینیم بیشینه‌شدنِ انتروپی چه شرطی رویِ $P_i$ احتمالِ رخدادنِ

[۱] accessible states

حالتِ $i$اُم می‌گذارد. باید

$$S := -k \sum_{i}^{\Omega} P_i \ln P_i, \tag{۱۸۰.۲}$$

را همراه با شرطِ بهنجار بودنِ احتمال

$$\Phi := \sum_{i}^{\Omega} P_i - 1 = 0, \tag{۱۸۱.۲}$$

بیشینه کنیم. چون در این‌جا قیدِ صفر بودنِ $\Phi$ را داریم، برایِ بیشینه کردنِ انتروپی لازم است از ضریبِ نامعینِ لاگرانژ استفاده کنیم و تابعِ $\tilde{S} := S + \lambda\Phi$ را بیشینه کنیم.

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial P_i} = -k \ln P_i - k + \lambda = 0, \tag{۱۸۲.۲}$$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \lambda} = \sum_{i}^{\Omega} P_i - 1 = 0. \tag{۱۸۳.۲}$$

از معادله‌یِ اول نتیجه می‌شود همه‌یِ $P_i$ها برابرند. معادله‌یِ دوم هم نتیجه می‌دهد

$$P_i = \frac{1}{\Omega}.$$

این نتیجه به یک اصلِ موضوع در مکانیکِ آماری مربوط است.

**اصل ۲.۵.۲** اصلِ موضوع در مکانیکِ آماری‌یِ حالتِ تعادل: تمامِ میکروحالت‌هایِ دردست‌رسِ یک سیستمِ بسته هم‌احتمال هستند.

- سیستمی در نظر بگیرید که می‌خواهیم در حالی‌که انتروپی بیشینه می‌شود، متوسطِ یک کمیتِ خاص هم معین باشد. مثلاً ما در مکانیکِ آماری برایِ یک سیستم که در مجاورتِ یک منبعِ گرمایی است، قید داریم که انرژی‌یِ متوسطِ سیستم کمیتی معین مثلِ $U$ باشد. در این حالت دو قید

$$\Phi_1 := \sum_{i} P_i - 1 = 0, \tag{۱۸۴.۲}$$

$$\Phi_2 := \sum_i E_i P_i - U = 0, \qquad (۱۸۵.۲)$$

و دو ضریبِ نامعین لاگرانژ داریم. تابعِی که باید بیشینه شود

$$\tilde{S} := S + \lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2, \qquad (۱۸۶.۲)$$

است.

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial P_i} = -\, k \ln P_i - k + \lambda_1 + \lambda_2 E_i = 0, \qquad (۱۸۷.۲)$$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \lambda_1} = \sum_i P_i - 1 = 0, \qquad (۱۸۸.۲)$$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \lambda_2} = \sum_i E_i P_i - U = 0, \qquad (۱۸۹.۲)$$

از حلِ معادله‌یِ اول نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} P_i =& \exp\left(\frac{\lambda_1}{k} - 1 + \frac{\lambda_2 E_i}{k}\right) \\ =& C \mathrm{e}^{-\beta E_i}, \end{aligned} \qquad (۱۹۰.۲)$$

که ثابت‌هایِ $C$ و $\beta$ به صورتِ زیر تعریف می‌شوند

$$C := \exp\left(\frac{\lambda_1}{k} - 1\right) \qquad (۱۹۱.۲)$$

$$\beta := -\,\frac{\lambda_2}{k}. \qquad (۱۹۲.۲)$$

ثابتِ $C$ با استفاده از قیدِ بهنجارشِ احتمال ۱۸۸.۲ تعیین می‌شود

$$\sum_i P_i - 1 = 0, \quad \Rightarrow \quad C = Z^{-1} \qquad (۱۹۳.۲)$$

که $Z$ تابعِ پارش است

$$Z := \sum_i \mathrm{e}^{-\beta E_i}. \qquad (۱۹۴.۲)$$

تنها یک ثابت یعنی $\beta$ باقی‌مانده است. برایِ به دست آوردنِ آن باید از ۱۸۹.۲ استفاده کنیم.

$$\sum_i E_i P_i = U, \quad \Rightarrow \quad \frac{\sum_i E_i \mathrm{e}^{-\beta E_i}}{Z} = U. \tag{۱۹۵.۲}$$

رابطه‌یِ اخیر را می‌توانیم به شکلِ زیر بنویسیم

$$U = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}. \tag{۱۹۶.۲}$$

با استفاده از این معادله معادله‌ای به دست می‌آید که علی‌الاصول با استفاده از آن می‌توان ثابتِ $\beta$ را به دست آورد. یک راهِ دیگر این است که برگردیم به تعریفِ انتروپی

$$\begin{aligned} S =& - k \sum_i P_i \ln P_i, \\ =& k \sum_i P_i \left(\ln Z + \beta E_i\right) \\ =& k \left(\ln Z + \beta U\right). \end{aligned} \tag{۱۹۷.۲}$$

در این‌جا از ۱۸۸.۲ و ۱۸۹.۲ استفاده کرده‌ایم. در این صورت

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial U} =& k \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial U} + \beta + U \frac{\partial \beta}{\partial U}\right) \\ =& k \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial U} + \beta - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial U}\right) \\ =& k\beta \end{aligned} \tag{۱۹۸.۲}$$

مثال ۳.۵.۲. انتروپیِ متناظر با یک توزیعِ پیوسته با

$$S := -k \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, p(x) \ln p(x), \tag{۱۹۹.۲}$$

تعریف می‌شود.

می‌توانیم نشان دهیم با دو شرطِ بهنجار بودنِ توزیعِ احتمال

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, p(x) = 1, \tag{۲۰۰.۲}$$

و این‌که واریانسِ توزیع مقداری معین، مثلاً $\sigma^2$ باشد،

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x^2\, p(x) = \sigma^2, \tag{۲۰۱.۲}$$

تنها توزیعی که انتروپی را فرینه می‌کند، توزیعِ نرمال است.

دو شرطِ بالا را با ضرایبِ نامعینِ لاگرانژ وارد می‌کنیم. در این صورت

$$\tilde{S} := S + \lambda_1 \left[1 - \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, p(x)\right] + \lambda_2 \left[\sigma^2 - \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x^2\, p(x)\right], \tag{۲۰۲.۲}$$

را باید فرینه کنیم.

$$\delta\tilde{S} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta p(x) \left[-k \ln p(x) - k - \lambda_1 - \lambda_2 x^2\right] = 0, \tag{۲۰۳.۲}$$

به ازایِ هر مقدارِ دل‌خواهِ $\delta p(x)$ نتیجه می‌دهد

$$p(x) = \exp\left[-1 - \frac{\lambda_1}{k} - \frac{\lambda_2}{k} x^2\right] \propto \exp\left[-\frac{\lambda_2}{k} x^2\right]. \tag{۲۰۴.۲}$$

با استفاده از دو شرطِ بهنجارش و اندازه‌یِ واریانس می‌رسیم به

$$p(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}}\, \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right]. \tag{۲۰۵.۲}$$

## ۶.۲ کُدگذاری

در نظریه‌یِ اطلاعات از همان تعریف‌هایِ ۱۷۴.۲ و ۱۷۵.۲ استفاده می‌شود. اما به دلیلی که بعداً روشن خواهد شد $k = 1$ و لگاریتم را در مبنایِ ۲ می‌گیرند. در این‌صورت اطلاعات $I_i = -\log_2 P_i$ است. انتروپی‌یِ یک سکه که احتمالِ شیرآمدنِ آن $P$ است،

$$S = -(P \log_2 P + (1 - P) \log_2 (1 - P)), \tag{۲۰۶.۲}$$

است و انتروپی‌یِ بیشینه $S_{\max} = 1$ است. برایِ ارسالِ اطلاعات گاهی لازم است، اطلاعات فشرده شود. در ساده‌ترین حالت اطلاعات به شکلِ دو دویی[۱] ذخیره می‌شود.

---

[۱] binary

مثال ۲.۶.۱. برایِ سکه‌ای هر بار که سکه شیر آمد $1$ و هر بار که خط آمد $0$ را ذخیره می‌کنیم. اگر احتمالِ شیرآمدن $P = \frac{1}{2}$ باشد، به ازایِ تعدادی آزمایش دنباله‌ای از اعدادِ $1$ و $0$ را داریم. مثلاً

$$0010110101011101000100111010 \cdots$$

اگر کسی به ما می‌گوید $1$ (یا $0$) آمده، یک بیت[۱] اطلاعات به ما داده است

$$-\log_2 \frac{1}{2} = 1\,\mathrm{bit}$$

به همین دلیل است که در نظریه‌یِ اطلاعات $k = 1$ و لگاریتم را در مبنایِ ۲ می‌گیرند. انتروپی برایِ این حالت هم $1$ است. بنا بر این در این حالت انتروپی با بیت به ازای هر علامت برابر است. اما اگر سکه نامتقارن باشد، مثلاً $P = \frac{1}{4}$، انتظار داریم تعدادِ $1$ خیلی کم‌تر از $0$ باشد. اگر مثلِ حالتِ قبل به ازای رخ دادنِ شیر $1$ و به ازایِ خط $0$ را ذخیره کنیم، باز هم به ازایِ هر علامت یک بیت اطلاعات داده شده اما برایِ این حالت انتروپی

$$S = -(\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\log_2\frac{3}{4}) = 0.81, \qquad (۲۰۷.۲)$$

است. در واقع برایِ حالتِ کاملاً بی‌نظم که انتروپی بیشینه است، انتروپی با تعدادِ بیت بر داده برابر است ولی برایِ حالاتِ دیگر این‌طور نیست.

می‌توان نشان داد:

قضیه ۲.۶.۲ در چارچوبِ نظریه‌یِ اطلاعات، انتروپی به طور متوسط کمترین تعدادِ بیتِ موردِ نیاز برای نشان دادنِ یک علامت است. یا به زبانِ کُدگُذاری انتروپی حدِّ پایینِ تعداد متوسطِ بیت‌های مورد نیاز (یا حدِّ پایینِ فشرده سازیِ داده‌ها) برای نشان دادن هر علامت است.

مثال ۲.۶.۳. چهار رویدادِ $s_1$، $s_2$، $s_3$ و $s_4$ با احتمال‌هایِ $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{8}$ و $\frac{1}{8}$ رخ می‌دهند. اگر بخواهیم از نمادهایِ دو دویی برایِ ذخیره یا انتقالِ اطلاعات استفاده کنیم، باید از چهار نماد

[۱] bit

استفاده کنیم. شاید ساده‌ترین انتخاب 00، 01، 10 و 11 باشد. در این‌صورت به طورِ متوسط برای هر علامت دو بیت لازم داریم. اگر انتروپی‌یِ متناظر را حساب کنیم

$$S = -(\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8}) = \frac{1}{8} = 1.75, \quad (۲۰۸.۲)$$

است، که کم‌تر است. بنا بر این مطابقِ قضیه‌یِ ۲.۶.۲ حتماً روشی برایِ ذخیره‌کردن با بیت‌هایِ کم‌تر هم هست. لزومی ندارد برایِ همه‌یِ چهار علامت نمادهایی به یک اندازه استفاده کنیم. برایِ ای‌کار روی‌داد با علامتی که محتمل‌تر است می‌توانیم از بیت‌هایِ کم‌تر استفاده کنیم. مثلاً ممکن است این چهار نماد را پیش‌نهاد کنیم: 0، 01، 10 و 11. اما این پیش‌نهاد این ایراد را دارد که رمزگشایی[1] یک‌تا نیست. مثلاً نمی‌دانیم 0110 متناظر با $s_3s_2$ است یا $s_1s_4s_1$. بنا بر این در این ذخیره‌سازی باید مراقب باشیم که علامت‌ها و نمادها یک‌به‌یک به هم قابلِ تبدیل باشند. اگر از چهار نمادِ 0، 10، 110 و 111 استفاده کنیم. برایِ روی‌دادِ $s_1$، که محتمل‌تر است نمادِ کم‌تر و برایِ روی‌دادهایِ $s_3$ و $s_4$ که نادرتر هستند نمادِ بیش‌تر از ۲ استفاده کنیم. در این‌حالت بیتِ متوسطِ موردِ نیاز

$$1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8} = 1.75, \quad (۲۰۹.۲)$$

می‌شود که با انتروپی برابر است.

در این مثال احتمال‌ها توان‌هایِ مختلفی از $\frac{1}{2}$ بودند که توانستیم به سادگی روشِ ذخیره‌سازی‌یِ کمینه را پیدا کنیم. در حالتِ کلی مسئله به این سادگی نیست.

> **قضیه ۴.۶.۲** برایِ زنجیره‌ای از نمادها که به اندازه‌یِ کافی طولانی باشد یک روشِ ذخیره‌سازی و رمزگشایی‌یِ یک‌تا وجود دارد که تعدادِ بیت بر نماد را می‌توان به مقدارِ دل‌خواه به انتروپی نزدیک کرد.

[1] decoding

## مسائل

۱.۲ یک بازی‌کنِ فوتبال با احتمالِ $20\%$ پنالتی را گل می‌کند. احتمالِ آن‌که $n$ دفعه پنالتی بزند که هیچ‌کدام گل نشود و دفعه‌یِ $n+1$ اُم گل شود، چه‌قدر است؟ به‌طورِ متوسط چند بار باید پنالتی بزند تا بالاخره گل شود؟

۲.۲ دو فردِ A و B با چیزی مثلِ یک سکه که یک سیستمِ دوحالته است (با احتمال‌هایِ $p$ وقتی که روی‌دادِ ۱ رخ دهد و $q := 1-p$ وقتی که روی‌دادِ ۲ رخ دهد)، بازی می‌کنند. برنده‌شدن یعنی وقتی که روی‌دادِ ۱ رخ می‌دهد و بازی تمام است. بازی را $A$ شروع می‌کند. اگر روی‌دادِ ۱ رخ دهد، او برنده است. در غیرِ این‌صورت بازی‌کنِ B بازی می‌کند. به همین ترتیب اگر روی‌دادِ ۱ رخ دهد، او برنده است و در غیرِ این‌صورت بازی را ادامه می‌دهند تا بالاخره یکی برنده شود.

الف‌ــ احتمالِ برنده‌شدنِ هر بازی‌کن چه‌قدر است؟

ب‌ــ در بازی‌هایی که بازی‌کنِ A برنده‌شده، او به طورِ متوسط در چندمین بار برنده شده‌است؟

۳.۲ اتاقی به ابعادِ $2.5\ m$، $5\ m$ و $5\ m$ را در نظر بگیرید. در این اتاق تقریباً $10^{27}$ ملکول وجود دارد. اگر همه‌یِ ملکول‌هایِ اتاق در گوشه‌ای به ابعادِ $2.5\ cm$، $5\ cm$ و $5\ cm$ جمع شوند، کسی که در گوشه‌یِ دیگرِ اتاق است خفه می‌شود. این احتمال چقدر است؟

۴.۲ ژنوم رشته‌ای است که در هر جای‌گاهِ آن یکی از 4 باز که آن‌ها را با حرف‌هایِ $C, G, T$ و $A$ نشان می‌دهیم، قرار دارد. چیزی مثلِ

$$\cdots TTAGGCAGTCGA \cdots$$

ژنومِ ویروسِ $\mathrm{HIV}-1$ رشته‌ای از $n = 10^4$ جای‌گاه با آرایشِ معین است.

الف‌ــ اگر در تکثیرِ این ویروس حرفِ مربوط به فقط یکی از جای‌گاه‌ها به اشتباه کپی شود، می‌گوییم جهشِ تک‌حرفی رخ داده است. چند ویروسِ متمایزِ جهش‌یافته‌یِ تک‌حرفی در تکثیرِ این ویروس ممکن است رخ دهد؟ همه‌یِ آن‌ها را هم‌احتمال بگیرید. احتمالِ یک جهشِ تک‌حرفی چه‌قدر است؟

ب_ اگر در تکثیرِ این ویروس فقط حروفِ مربوط به $k$ جای‌گاه به اشتباه کپی شوند، می‌گوییم جهشِ $k$ حرفی رخ داده است. تعدادِ تمامِ آرایش‌هایِ مربوط به جهش‌هایِ دوحرفی برایِ این ویروس چه‌قدر است؟ تعدادِ تمامِ آرایش‌هایِ مربوط به جهش‌هایِ $k$ حرفی برایِ این ویروس چه‌قدر است؟

ج_ با استفاده از احتمالی که در بندِ الف به دست آوردید، احتمالِ این‌که یک ویروس موقعِ تکثیر یک جهشِ دوحرفی داشته باشد، چه‌قدر است؟

۵.۲ در مرکزِ محفظه‌ای کره‌ای شکل $N$ ذره‌یِ ناپایدار وجود دارد. این ذرات به دو طریق واپاشی می‌کنند. نسبتِ احتمالِ واپاشی از این دو طریق به نسبتِ $p$ به $q$ است. در مُد اول، واپاشی منجر به تولیدِ الکترونی می‌شود که احتمال خروج آن از مرکز در تمامِ جهات یکسان است. در مُد دوم الکترون تولید نمی‌شود. دستگاهِ آشکارسازِ الکترون در رویِ سطحِ کروی قرار دارد و مساحتِ حساسِ آن زاویه‌یِ فضاییِ $\Omega$ را در بر می‌گیرد. احتمالِ آن که پس از واپاشیِ تمامِ ذراتِ ناپایدار، آشکارساز هیچ الکترونی را ثبت نکرده باشد، چقدر است؟ ( احتمالِ قطعِ برق و خرابیِ دستگاه را ندیده بگیرید(! جوابِ خود را به ازایِ $N = 40$، $p = 3/4$، $q = 1/4$ و $\Omega = \pi/6$ محاسبه‌کنید.

۶.۲ نشان دهید توزیعِ هندسی بدونِ حافظه است.

۷.۲ الف_ بردارِ $\boldsymbol{B}$ با طولِ ثابت در نظر بگیرید. زاویه‌ای که این بردار با محورِ $x$ می‌سازد را $\theta$ می‌گیریم. فرض کنید $\theta$ کاملاً تصادفی باشد. احتمالِ آن که مولفه‌یِ $x$ بردار بینِ $\boldsymbol{B}_x$ و $B_x + dB_x$ باشد چقدر است؟

ب_ ملکولی در یک گازِ بینِ هر دو برخوردِ متوالی فاصله‌یِ یکسانِ $l$ را طی می‌کند. پراکنده‌شدن در همه‌یِ جهات با احتمالِ مساوی است. جابجاییِ میانگینِ یک ملکول $R$ پس از $N$ جابجایی چیست؟ میانگینِ مجذورِ جابجاییِ $\langle R^2\rangle$ چیست؟

۸.۲ سیستمی دو حالته در نظر بگیرید که احتمالِ روی دادنِ حالتِ اول $x$ باشد. در قضیه‌یِ بِیز داشتیم:

$$p_X(x|M) = \frac{P(M|x)p_X(x)}{\int_0^1 \mathrm{d}y\; P(M|y)p_X(y)}.$$

از $N$ دفعه آزمایش $M$ دفعه حالتِ اول رخ داده است. فرض کنید

$$p_X(x) = \frac{1}{2}[\delta(x-1/4) + \delta(x-3/4)].$$

میانگینِ احتمالِ $x$، $E(x|M)$ را محاسبه کنید.

۹.۲ احتمالِ اینکه یک راننده یک تصادف در ماه انجام دهد یک درصد است. احتمالِ آن‌که حداقل یک تصادف در سال داشته باشد چه‌قدر است؟ احتمالِ آن‌که دقیقاً یک تصادف در سال داشته باشد چه‌قدر است؟

۱۰.۲ درونِ جعبه‌ای ۶ توپِ سفید و ۴ توپ سیاه است. دو تا از توپ‌ها را از جعبه بیرون می‌آوریم. احتمالِ آن‌که اولی سفید و دومی سیاه باشد چه‌قدر است؟

۱۱.۲ در دو جعبه‌یِ یک و دو به ترتیب ۱۰۰ و ۲۰۰ لامپ وجود دارد. ۱۵ لامپ جعبه‌یِ یک و ۵ لامپ جعبه‌یِ دو خرابند. فرض کنید به طورِ تصادفی از یکی از جعبه‌ها یک لامپ بیرون می‌آوریم. احتمالِ این‌که این لامپ خراب باشد چه‌قدر است؟ حالا لامپ را بررسی می‌کنیم و می‌بینیم خراب است. احتمالِ آن‌که لامپ از جعبه‌یِ یک باشد چه‌قدر است؟

۱۲.۲ ظرفی را به دو بخشِ مساوی تقسیم کرده‌ایم. ۱۰ ذره‌یِ مشابه را درونِ این ظرف می‌اندازیم. تعداد حالاتی که $n_1$ ذره در سمتِ راست و $n_2$ ذره در سمتِ چپ است را با $\Omega(n_1, n_2)$ نمایش می‌دهیم.

الف_ تعدادِ حالت‌هایِ زیر را به دست آورید

$$\Omega(5,5),\ \Omega(6,4).$$

ب_ احتمالِ این که $n_1$ ذره در سمتِ راست و $n_2$ ذره در سمتِ چپ است را با $P(n_1, n_2)$ نمایش می‌دهیم. احتمال‌هایِ زیر را به دست آورید

$$P(5,5),\ P(6,4).$$

ج_ متوسطِ $n_1$ یعنی $\langle n_1 \rangle$ را به دست آورید.

۱۳.۲ الفـ متغیرِ تصادفیِ $X$ با توزیعِ $p_X(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-x/3}$ را به طوری که $0 \leq x$ در نظر بگیرید. متوسطِ $X$، $\langle X \rangle$ را به دست آورید.
ب‌ـ احتمالِ $P(X \geq 3)$ را به دست آورید.

۱۴.۲ توزیعِ متغیرِ تصادفیِ $s = am + bn$ که دو متغیرِ تصادفیِ $n$ و $m$ با توزیعِ پواسون و $a$ و $b$ دو ثابتِ مثبت هستند چیست؟

۱۵.۲ یک سکه سالم در نظر بگیرید که احتمالِ شیر یا خط آمدنِ آن برابر باشد. احتمالِ آن‌که از ۵۰۰۰ دفعه پرتابِ سکه بینِ ۲۴۷۵ بار تا ۲۵۲۵ بارِ آن شیر بیاید چه‌قدر است؟ می‌توانید از جدولِ تابعِ خطا استفاده کنید.

۱۶.۲ یک وسیله حساس که شامل قطعه‌های زیادی از مرتبه‌ی ۱۰۰۰۰۰ است. احتمالِ آن‌که یک قطعه خراب باشد $p = 2 \times 10^{-5}$ است. اگر پنج قطعه یا بیش‌تر خراب شوند زنگ خطر به صدا در می‌آید. احتمالِ چنین حادثه‌ای چه‌قدر است؟

۱۷.۲ سکه‌ای داریم که هیچ اطلاعی در مورد شیر یا خط آمدنِ آن نداریم. فرض کنید توزیعِ احتمال برای احتمالِ شیر آمدن بینِ صفر و یک توزیعی یک‌نواخت باشد. اگر از ۱۰ پرتاب ۶ پرتاب شیر بیاید، احتمالِ متوسطِ شیر آمدن چه‌قدر است؟

۱۸.۲ متغیرِ تصادفیِ $X$ توزیعی یک‌نواخت بینِ $0$ تا $1$ دارد و خارج از این ناحیه صفر است.
الف‌ـ توزیعِ متغیرِ تصادفیِ $Y = X^2$ چیست؟
ب‌ـ متوسط و واریانسِ متغیرِ تصادفیِ $Y$ را به دست آورید.

۱۹.۲ فرض کنید $X$ متغیری تصادفی با توزیعِ زیر باشد

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\pi^2}, & 0 < x < \pi \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

تابعِ توزیعِ متغیرِ تصادفیِ $Y = \sin X$، $p_Y(y)$ را به دست آورید.

۲۰.۲ الف_ متغیرِ تصادفیِ $X$ با توزیعِ

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 < x \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. متوسطِ $X$، یعنی $\langle X\rangle$ و واریانسِ آن $\sigma_X$ را به دست آورید.

ب_ متغیرِ تصادفیِ $Y$ تابعی از $X$ است. توزیعِ $p_Y(y)$ را به دست آورید. $\langle Y\rangle$ و واریانسِ آن $\sigma_Y$ را به دست آورید.

۲۱.۲ نشان دهید تابعِ مولدِ انباشتک برای توزیع‌هایِ داده‌شده به قرارِ زیرند.

$$K(u) = \begin{cases} \frac{\mu}{p}\ln\left(1 - p + p\mathrm{e}^u\right) & \text{binomial} \\ -\ln\left(1 + \mu - \mu\mathrm{e}^u\right) & \text{geometric} \\ \mu(\mathrm{e}^u - 1) & \end{cases}$$

که $\mu = \langle n\rangle$ است.

۲۲.۲ روابطِ زیر که در متنِ درس بود را اثبات کنید.

$$\begin{aligned}
\kappa_0 &= 0, \\
\kappa_1 &= \langle X\rangle, \\
\kappa_2 &= \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2, \\
\kappa_3 &= \langle X^3\rangle - 3\langle X\rangle\langle X^2\rangle + 2\langle X\rangle^3, \\
\kappa_4 &= \langle X^4\rangle - 4\langle X\rangle\langle X^3\rangle + 12\langle X\rangle^2\langle X\rangle^2 - 6\langle X\rangle^4.
\end{aligned}$$

۲۳.۲ الف_ دو متغیرِ تصادفیِ مستقلِ $X$ و $Y$ را در نظر بگیرید که تابعِ توزیعِ آن‌ها برایِ مقادیرِ مثبتِ $x$ و $y$، $p(x) = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$ و $p(y) = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda y}$ و برایِ مقادیرِ منفیِ $x$ و $y$، صفر است. تابعِ توزیعِ $Z = X + Y$ را به دست آورید.

ب_ اگر تابع توزیع‌ها گاوسی باشند، نتیجه چیست؟

ج_ اگر تابع توزیع‌ها کوشی باشند، نتیجه چیست؟

۲۴.۲ $n$ متغیرِ تصادفیِ $X_1, \cdots, X_n$ که متغیر $X_j$ با احتمالِ $p_j$ مقدارِ $1$ و با احتمالِ $q_j = 1 - p_j$ مقدارِ $-1$ اختیار می‌کند. واریانسِ متغیرِ تصادفیِ

$$Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

را با $V$ نشان می‌دهیم. کسرِ $\dfrac{V}{\sum_{i=1}^{n} p_i q_i}$ چه‌قدر است؟

۲۵.۲ $X$ متغیری تصادفی با توزیعِ کوشی

$$p_X(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)} \qquad (۲۱۰.۲)$$

است.

الف‌ــ متوسطِ $X$ چه‌قدر است؟

ب‌ــ توزیعِ متغیرِ تصادفیِ $Y = 1/X$ چیست؟

۲۶.۲ دو متغیرِ تصادفیِ $X_1$ و $X_2$ توزیعی نرمال با متوسطِ $\mu$ و واریانسِ $\sigma$ دارند. توزیعِ متغیرِ تصادفیِ $Z = X_1 + X_2$ چیست؟

۲۷.۲ متغیرِ تصادفیِ $X$ توزیعی نرمال با متوسطِ $0$ و واریانسِ $1$ دارد.

الف‌ــ توزیعِ این متغیرِ تصادفی را بنویسید.

ب‌ــ احتمالِ $P(|X| \le 1)$ چه‌قدر است؟

ج‌ــ توزیعِ متغیرِ $Y = \mathrm{e}^X$ چیست؟ متوسط و واریانسِ متغیرِ تصادفیِ $Y$ چیست؟ $\langle Y^n \rangle$ چیست؟

۲۸.۲ دو متغیرِ تصادفیِ $X_1$ و $X_2$ توزیعی نرمال با متوسطِ صفر و واریانسِ $1$ دارند. نشان دهید توزیعِ متغیرِ تصادفیِ $Z = \dfrac{X_1}{X_2}$ توزیعِ کوشی است.

۲۹.۲ الف‌ــ متغیرِ تصادفیِ $X$ توزیعی نمایی دارد یعنی

$$p_X(x) = \begin{cases} A\mathrm{e}^{-Bx}, & 0 \le x < \infty \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

فرض کنید متوسطِ $X$، $\nu$ باشد. مقادیرِ $A$ و $B$ را به دست آورید.

ب‌ــ دو متغیرِ تصادفیِ مستقلِ $X_1$ و $X_2$ همین توزیع را دارند. احتمالِ

$$P(X_1 > 5X_2)$$

را به دست آورید.

ج‌ـ توزیعِ $Y = X_1 + X_2$ را به دست آورید.

۳۰.۲ الف‌ـ متغیرِ تصادفیِ $X$ با توزیعِ نماییِ

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x/2}, & 0 \leq x < \infty \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

را در نظر بگیرید. متوسطِ $X$، $\nu$ را به دست آورید.

ب‌ـ احتمالِ $P(X \geq 3)$ و احتمالِ شرطیِ $P(X \leq 6|X \geq 3)$ را به دست آورید.

ج‌ـ تابعِ مولدِ

$$M(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{tx} p_X(x)$$

را به دست آورید.

۳۱.۲ الف‌ـ متغیرِ تصادفیِ $X$ با توزیعِ

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 < x \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. متوسطِ $X$، یعنی $\langle X\rangle$ و واریانسِ آن $\sigma_X$ را به دست آورید.

ب‌ـ متغیرِ تصادفیِ $Y$ تابعی از $X$ است.

$$Y = X^2$$

توزیعِ $p_Y(y)$ را به دست آورید. $\langle Y\rangle$ و واریانسِ آن $\sigma_Y$ را به دست آورید.

۳۲.۲ الف‌ـ متغیرِ تصادفیِ مستقلِ $X$ با تابعِ توزیعِ

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & 1 \leq x, \end{cases} \qquad (۲۱۱.۲)$$

را در نظر بگیرید. تابعِ توزیعِ جمعِ سه متغیرِ تصادفیِ مستقل با این توزیع

$$Y = X_1 + X_2 + X_3$$

را به دست آورید. متوسطِ $Y$، و واریانسِ آن $\sigma_Y$ را به دست آورید.

ب ــ با نرم‌افزارهایی مثلِ Maple, Mathematica یا هر نرم‌افزارِ دیگری که آشنا هستید، منحنی‌های شکلِ ۷.۲ را به دست آورید.

۳۳.۲ الف ــ سیستمی سه حالته که مقادیرِ $+1$، $0$ و $-1$ را می‌تواند اختیار کند، در دست داریم.

الف ــ اگر بخواهیم انتروپی‌یِ متناظر با توزیعِ احتمالِ حالت‌هایِ مختلفِ این سیستم بیشینه شود. احتمالِ آمدنِ هر مقدار چه‌قدر است؟

ب ــ اگر این سیستم به گونه‌ای باشد که علاوه بر بیشینه شدنِ انتروپی، قید داشته باشیم که متوسطِ مجذورِ عددی که با آن می‌آید مقدارِ $\frac{1}{2}$ باشد، احتمالِ آمدنِ هر مقدار چیست؟

۳۴.۲ الف ــ تاسی چهار وجهی که رویِ وجه‌هایِ آن اعدادِ $1$، تا $4$ است را در اختیار داریم. می‌خواهیم انتروپی‌یِ متناظر با توزیعِ احتمالِ حالت‌هایِ مختلفِ این تاس بیشینه شود. احتمالِ آمدنِ هر وجهِ تاس چه‌قدر است؟ اگر این تاس به گونه‌ای باشد که متوسطِ عددی که با آن می‌آید مقدارِ $A$ (مثلاً $\frac{5}{2}$ یا $2$) باشد، احتمالِ آمدنِ هر وجهِ تاس چه‌قدر است؟ برایِ حلِ کاملِ مسئله احتمالاً لازم دارید در مرحله‌ای از نرم‌افزارهایِ محاسباتی استفاده کنید.

ب ــ تاسی شش وجهی که رویِ وجه‌هایِ آن اعدادِ $1$، تا $6$ است را در نظر بگیرید. می‌خواهیم انتروپی‌یِ متناظر با توزیعِ احتمالِ حالت‌هایِ مختلفِ این تاس بیشینه شود. احتمالِ آمدنِ هر وجهِ تاس چه‌قدر است؟ اگر این تاس به گونه‌ای باشد که متوسطِ عددی که با آن می‌آید مقدارِ $B$ (مثلاً $\frac{7}{2}$ یا $4$) باشد، احتمالِ آمدنِ هر وجهِ تاس چه‌قدر است؟ برایِ حلِ کاملِ مسئله احتمالاً لازم دارید در مرحله‌ای از نرم‌افزارهایِ محاسباتی استفاده کنید.

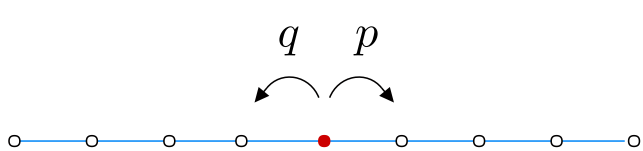
# ۳
# فرآیندهای تصادفی

## ۱.۳ ولگشت

یکی از ساده‌ترین مثال‌ها برایِ یک سیستمِ مکان گسسته و زمان گسسته مساله ولگشت است. پله‌هایِ زمانی را با متغیرِ $t$ و مکانِ ولگرد در زمانِ $t$ را با $s_t$ نمایش می‌دهیم.

$$s_{t+1} = s_t + X \tag{۱.۳}$$

که $X$ یک متغیرِ تصادفی است. در حالتِ کلی می‌توانیم توزیعی برایِ $X$ داشته باشیم. جابه‌جاییِ ولگرد جمعِ $t$ متغیرِ تصادفی است. اندازه قدم‌ها را یکی می‌گیریم $X = \pm 1$ و احتمالِ به راست رفتن، $p$ و چپ رفتن $q$ است. به این مساله ولگشتِ ساده می‌گوییم.




شکل ۱.۳ ولگشتِ ساده

### ۱.۱.۳ ول‌گشتِ ساده

احتمالِ آن‌که در پله‌یِ زمانی‌یِ $t$ ول‌گرد در جای‌گاهِ $s$ باشد را با $P_{t,s}$ نمایش می‌دهیم. معادله‌یِ تحولِ $P_{t,s}$ برایِ حالتِ متقارن $p = q = 1/2$ عبارت است از

$$P_{t+1,s} = \frac{1}{2}P_{t,s-1} + \frac{1}{2}P_{t,s+1}. \qquad (۲.۳)$$

به معادله‌یِ تحولِ زمانی‌یِ تابعِ احتمال، معادله مادر[۱] هم می‌گویند. برایِ حلِ این معادله از روشِ تابعِ مولد استفاده می‌کنیم. با تعریفِ تابعِ مولدِ

$$G_t(z) := \sum_{s=-\infty}^{\infty} P_{t,s} z^s \qquad (۳.۳)$$

که احتمال‌هایِ $P_{t,s}$ ضرایبِ بسطِ لورانِ $G_t(z)$ هستند،

$$P_{t,s} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{G_t(z)}{z^{s+1}}\mathrm{d}z \qquad (۴.۳)$$

و معادله‌یِ مادر می‌رسیم به

$$G_{t+1}(z) = \frac{1}{2}\left(z + z^{-1}\right) G_t(z). \qquad (۵.۳)$$

که جوابِ آن

$$G_t(z) = \left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right)^t G_0(z). \qquad (۶.۳)$$

است. $G_0(z)$ از شرطِ اولیه به دست می‌آید. اگر فرض کنیم ذره در ابتدا در مبدا بوده شرطِ اولیه

$$P_{t,s}\big|_{t=0} = \delta_{s,0} \qquad (۷.۳)$$

و $G_0(z) = 1$ است. در این صورت

$$G_t(z) = \left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right)^t \qquad (۸.۳)$$

[۱] Master Equation

$$=\frac{1}{(2z)^t}\left(1+z^2\right)^t \tag{۹.۳}$$

$$=\frac{1}{2^t}\sum_{k=0}^{t}\frac{t!}{k!(t-k)!}z^{2k-t} \tag{۱۰.۳}$$

$$=\frac{1}{2^t}\sum_{s=-t}^{t}\frac{t!}{(\frac{t+s}{2})!(\frac{t-s}{2})!}z^s, \tag{۱۱.۳}$$

که از این‌جا

$$P_{t,s}=\begin{cases}\dfrac{t!}{(\dfrac{t+s}{2})!(\dfrac{t-s}{2})!}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^t, & t-s=\text{even}\geq 0\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases} \tag{۱۲.۳}$$

**مثال ۱.۱.۳.** فرض کنید ذره در ابتدا در مکانِ $s_0$ بوده یعنی شرطِ اولیه

$$P_{t,s}\big|_{t=0}=\delta_{s,s_0} \tag{۱۳.۳}$$

است. احتمالِ $P_{t,s}$ را به دست آورید.

**مثال ۲.۱.۳.** فرض کنید ذره در ابتدا با توزیعِ یک‌نواخت بینِ $s_0$ و $s_1$ است. احتمالِ $P_{t,s}$ را به دست آورید.

### ۲.۱.۳ ولگشتِ مقید

با اعمالِ قیدهایی ولگشتِ مقید خواهیم داشت. این قیدها می‌توانند چیزهایی مثلِ دیوار یا دیوارهایِ منعکس کننده یا دیوارِ جاذب و یا حالت‌هایِ پیچیده‌تر باشد.

### ۳.۱.۳ ولگشتِ متقارن در حضورِ دیوارِ منعکس کننده

فرض کنید دیواریِ منعکس کننده در مبدا است. می‌خواهیم احتمالِ پیدا کردنِ ولگرد در زمانِ $t$ و در مکانِ $s$ در حضورِ دیواریِ منعکس‌کننده در مبدا که با $\tilde{P}_{t,s}$ نشان می‌دهیم را به دست آوریم. منظور از دیوارِ منعکس‌کننده این است که وقتی ذره به دیوار می‌رسد با احتمالِ یک از دیوار دور می‌شود. اگر دیوار نبود ذره با احتمالِ $1/2$ به راست و با احتمالِ $1/2$ به چپ می‌رفت. از آن‌جا

که بازتاب از دیوار با احتمالِ یک صورت می‌گیرد یعنی احتمالِ برگشت از دیوار، دو برابر احتمالِ برگشت از هر نقطه‌یِ دیگری است. بنا بر این هر مسیری که شاملِ یک بازتاب از دیوار است با احتمالِ دو برابر و دو بار بازتاب از دیوار با احتمالِ چهار برابر و $n$ بازتاب از دیوار با احتمالِ $2^n$ برابر سهم دارد. برایِ در نظر گرفتنِ این ضریب فرض می‌کنیم متناظر با مکانِ نهاییِ $s$ تصویریِ از آن در $-s$ وجود دارد. برایِ مسیرهای که نقطه تقاطعی با دیوار دارند، متناظر با هر قدم تصویرِ آن قدم وجود دارد. احتمالِ پیدا کردنِ ول‌گرد در زمانِ $t$ و در مکانِ $s \neq 0$ در حضورِ دیواری در مبدا

$$\tilde{P}_{t,s} = P_{t,s} + P_{t,-s}, \quad s \neq 0 \tag{۱۴.۳}$$

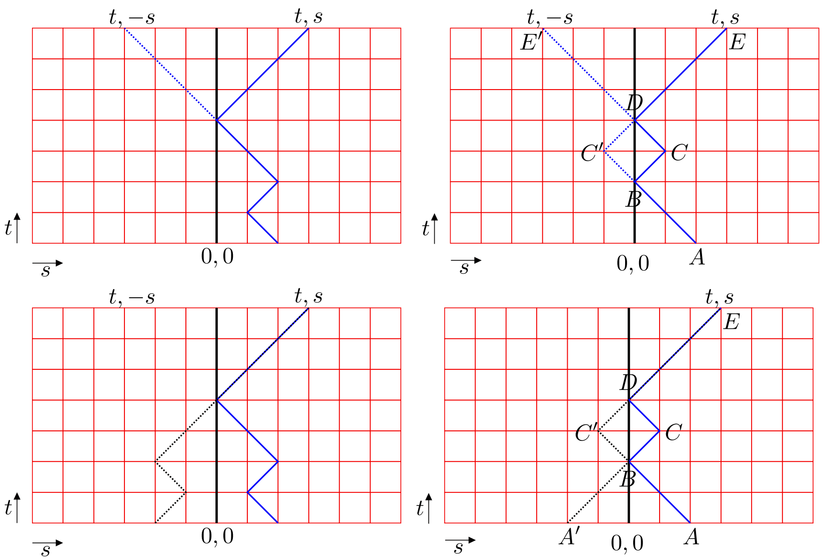
است که $P_{t,s}$ احتمالِ پیدا کردنِ ول‌گرد در زمانِ $t$ و در مکانِ $s$ در غیابِ دیوار است. از $P_{t,-s}$ دو تعبیر می‌توان داشت. یکی این است که ول‌گرد در غیابِ دیوار به نقطه‌ای که تصویرِ نقطه‌یِ نهایی نسبت به دیوار یعنی ، $-s$ برسد. تعبیرِ دیگر این احتمال در واقع مثلِ این است که ول‌گرد یک تصویر داشته باشد و این احتمال، احتمالِ رسیدنِ ول‌گردِ تصویر از تصویرِ نقطه‌یِ ابتدایی به نقطه‌یِ نهاییِ واقعی البته در غیابِ دیوار برسد. شکلِ ۲.۳ را ببینید. محورِ اُفقی مکان و محورِ عمودی زمان است. هر قدمِ ول‌گرد مثلِ یک پرشِ قطری است. در مسیری که یک بازتاب دارد در غیابِ دیوار یک مسیرِ اضافه وجود دارد و وقتی دو بازتاب داریم سه مسیرِ اضافه وجود دارد. علاوه بر مسیرِ $ABCDE$ سه مسیرِ اضافه $ABC'DE$, $ABC'DE'$ و $ABCDE'$ هستند.

اما اگر مقصدِ نهایی رویِ دیوار باشد، جواب کمی متفاوت است. به سادگی می‌توانید خود را قانع کنید که

$$\tilde{P}_{t,0} = P_{t,0} \tag{۱۵.۳}$$

یعنی اگر دیوار منعکس‌کننده هم نبود احتمالِ یافتنِ ول‌گرد در آن نقطه فرقی نمی‌کرد. بنا بر این جوابِ کلیِ مساله عبارت است از

$$\tilde{P}_{t,s} = P_{t,s} + P_{t,-s}(1 - \delta_{s,0}). \tag{۱۶.۳}$$




شکل ۲.۳ ول‌گشتِ در حضورِ یک دیوارِ انعکاسی. شکل‌هایِ ستونِ اول یک انعکاس از دیوار و شکل‌هایِ ستونِ دوم دو انعکاس از دیوار هستند. شکل‌هایِ سطرِ اول نشان می‌دهد که در غیابِ دیوار همان‌طور که احتمالِ این وجود دارد که ول‌گرد به نقطه‌یِ $s$ برود، احتمالِ این هم وجود دارد که به نقطه‌ای که تصویرِ آن است برود. شکل‌هایِ سطرِ دوم نشان می‌دهد که در غیابِ دیوار همان‌طور که احتمالِ این وجود دارد که ول‌گرد به نقطه‌یِ $s$ برود، احتمالِ این هم وجود دارد که از تصویرِ نقطه‌یِ شروع ول‌گردی به نقطه‌یِ $s$ برود.

راهِ دیگرِ بررسیِ این مساله استفاده از معادله‌ی مادر با شرطِ مرزیِ مناسب است. معادله‌ی مادر برای این مساله

$$\tilde{P}_{t+1,s} = \frac{1}{2}\tilde{P}_{t,s-1} + \frac{1}{2}\tilde{P}_{t,s+1}, \quad s \neq 0,1 \tag{۳.۱۷}$$

$$\tilde{P}_{t+1,1} = \tilde{P}_{t,0} + \frac{1}{2}\tilde{P}_{t,2}, \tag{۳.۱۸}$$

$$\tilde{P}_{t+1,0} = \frac{1}{2}\tilde{P}_{t,1}, \tag{۳.۱۹}$$

که دو معادله‌ی آخر در واقع شرطِ مرزی هستند. شرطِ اولیه هم می‌تواند چیزی مثلِ

$$\tilde{P}_{t,s}\big|_{t=0} = \delta_{s,k}$$

باشد، یعنی ول‌گرد در ابتدا در جای‌گاهِ $k$ بوده است. برای حلِ این مساله از روشی که در حل معادلاتِ دیفرانسیلِ پاره‌ای استفاده می‌شود، یعنی جداسازیِ متغیرها استفاده می‌کنیم.

$$\tilde{P}_{t,s} \sim T_t \psi_s \tag{۳.۲۰}$$

با جاگذاریِ این جواب در اولین معادله‌ی (۳.۱۷) می‌رسیم به

$$T_{t+1}\psi_s = \frac{1}{2}T_t\left(\psi_{s-1} + \psi_{s+1}\right), \tag{۳.۲۱}$$

یا

$$\frac{T_{t+1}}{T_t} = \frac{(\psi_{s-1} + \psi_{s+1})}{2\psi_s}. \tag{۳.۲۲}$$

سمتِ چپِ این رابطه تابعی از $t$ و سمتِ راستِ آن تابعی از $s$ است که آن را $U$ می‌گیریم که نتیجه می‌دهد

$$T_{t+1} = U^{t+1}T_0, \tag{۳.۲۳}$$

و

$$U\psi_s = \frac{1}{2}\left(\psi_{s-1} + \psi_{s+1}\right), \qquad s \neq 0,1. \tag{۳.۲۴}$$

توجه داشته باشید که در معادله‌یِ بالا مثلاً به ازایِ جاگذاری‌یِ $s = 2$، $\psi_1$ در سمتِ راستِ معادله ظاهر می‌شود، ولی $\psi_0$ هیچ‌وقت ظاهر نمی‌شود. برایِ حلِ (۲۴.۳) از نهاده‌یِ $\psi_s \sim Z^s$ به عنوانِ جواب استفاده می‌کنیم. این جواب فقط برایِ توابعی که در معادله‌یِ (۲۴.۳) هستند است. پس $\psi_0$ به این شکل نیست. در این صورت با استفاده از این نهاده می‌رسیم به

$$U = \frac{1}{2}(Z + Z^{-1}), \tag{۲۵.۳}$$

که یک معادله درجه‌یِ دو برای $Z$ است. شرایطِ مرزی یعنی دو معادله‌یِ آخرِ (۱۷.۳) تبدیل می‌شود به

$$U\psi_1 = \psi_0 + \frac{1}{2}\psi_2, \tag{۲۶.۳}$$

$$U\psi_0 = \frac{1}{2}\psi_1. \tag{۲۷.۳}$$

جوابِ کلی‌یِ (۲۴.۳) عبارت است از

$$\psi_s = C_1 Z^s + C_2 Z^{-s}, \qquad s \neq 0. \tag{۲۸.۳}$$

همان‌طور که گفتیم این جواب فقط برایِ توابعی که در معادله‌یِ (۲۴.۳) هستند است و $\psi_0$ به این شکل نیست. با جاگذاری‌یِ این جواب در شرایطِ مرزی‌یِ (۲۶.۳) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\psi_0 =& U\psi_1 - \frac{1}{2}\psi_2\\ =& \frac{1}{2}(C_1 + C_2).\end{aligned} \tag{۲۹.۳}$$

با جاگذاری‌یِ این مقدار به جایِ $\psi_0$ و $\psi_1 = C_1 Z + C_2 Z^{-1}$ در شرطِ مرزی‌یِ (۲۷.۳) نتیجه می‌شود

$$C_1 = C_2. \tag{۳۰.۳}$$

پس

$$\psi_s = C_1(Z^s + Z^{-s}), \qquad s \neq 0 \tag{۳۱.۳}$$

$$\psi_0 = C_1. \tag{۳۲.۳}$$

دو جوابِ معادله‌یِ (۲۵.۳) معکوس هم هستند. جواب‌ها یا حقیقی هستند یا مختلط. اگر جوابها حقیقی و مخالفِ 1 باشند، چون جمع هر عددِ حقیقی و معکوسش اگر مخالفِ 1 باشند، بزرگ‌تر از 2 است، از (۲۵.۳) نتیجه می‌شود که $|U| > 1$ است که در اینصورت $T_t$ با گذشتِ زمان بزرگ می‌شود. پس جواب حقیقیِ مخالفِ 1 برایِ $Z$ قابلِ قبول نیست. از طرفِ دیگر اگر $Z$ مختلط باشد، یا اندازه‌اش 1 است، یعنی فاز است یا این‌که اندازه‌اش مخالفِ 1 است، مثلاً

$$Z = r\mathrm{e}^{i\theta}, \qquad r \neq 1. \tag{۳۳.۳}$$

جوابِ (۳۱.۳) به ازایِ $s$ های‌یِ بزرگ به سمتِ بی‌نهایت می‌رود. پس تنها جوابِ ممکن برایِ $Z$ این است که فاز باشد. با جای‌گذاری‌یِ جوابی به شکلِ $Z = \mathrm{e}^{i\theta}$ در (۳۱.۳) می‌رسیم به

$$\psi_s = 2C_1 \cos s\theta, \qquad s \neq 0 \tag{۳۴.۳}$$

$$\psi_0 = C_1, \tag{۳۵.۳}$$

به همراهِ

$$U = \cos\theta. \tag{۳۶.۳}$$

در این‌صورتِ جوابِ مساله عبارت است از

$$\tilde{P}_{t,s} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, A(\theta) \cos s\theta \cos^t\theta, \quad s \neq 0, \tag{۳۷.۳}$$

$$\tilde{P}_{t,0} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, A(\theta) \cos^t\theta. \tag{۳۸.۳}$$

با استفاده از شرطِ اولیه می‌توانیم $A(\theta)$ را به دست آوریم. مثلاً با شرطِ اولیه‌یِ

$$\tilde{P}_{t,s}\big|_{t=0} = \delta_{s,k} \tag{۳۹.۳}$$

می‌رسیم به

$$\delta_{s,k} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, A(\theta) \cos s\theta, \quad s \neq 0 \tag{۴۰.۳}$$

که نتیجه می‌دهد

$$A(\theta) = \frac{1}{\pi}\cos k\theta. \tag{۴۱.۳}$$

پس

$$\tilde{P}_{t,s} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, \cos k\theta\, \cos s\theta\, \cos^t\theta, \quad s\neq 0, \tag{۴۲.۳}$$

$$\tilde{P}_{t,0} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, \cos k\theta\, \cos^t\theta. \tag{۴۳.۳}$$

یک راه برای محاسبه‌یِ این انتگرال‌ها استفاده از ابزارِ توابعِ مختلط است. با همان تغییرِ متغیرِ $Z = \mathrm{e}^{i\theta}$ و در نتیجه $\mathrm{d}\theta = -i\, Z^{-1}\mathrm{d}Z$، رابطه‌یِ اولِ (۴۲.۳) تبدیل می‌شود به

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_{t,s} =& \oint \frac{\mathrm{d}Z}{4\pi i Z}\left(Z^{k-s} + Z^{-k+s} + Z^{k+s} + Z^{-k-s}\right)\left(\frac{Z+Z^{-1}}{2}\right)^t,\\
=& \oint \frac{\mathrm{d}Z}{4\pi i Z}\sum_{m=0}^{t}\left(\frac{1}{2}\right)^t\binom{t}{m}\left(Z^{2m-t+k-s} + Z^{2m-t-k+s}\right.\\
&\left. + Z^{2m-t+k+s} + Z^{2m-t-k-s}\right)\\
=&\left(\frac{1}{2}\right)^t\left[\binom{t}{\frac{t-s+k}{2}} + \binom{t}{\frac{t+s+k}{2}}\right]\\
=&P_{t,s} + P_{t,-s}
\end{aligned} \tag{۴۴.۳}$$

این همان جوابی است که در (۱۴.۳) با روشی دیگر به دست آورده بودیم. در محاسبه‌یِ اخیر از

$$\oint \frac{\mathrm{d}Z}{2\pi i} Z^{\ell-1} = \delta_{\ell,0} \tag{۴۵.۳}$$

استفاده کرده‌ایم. با تغییرِ متغیرِ $Z = \mathrm{e}^{i\theta}$ رابطه‌یِ دومِ (۴۲.۳) تبدیل می‌شود به

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_{t,0} =& \oint \frac{\mathrm{d}Z}{4\pi i Z}\left(Z^{k} + Z^{-k}\right)\left(\frac{Z+Z^{-1}}{2}\right)^t,\\
=& \oint \frac{\mathrm{d}Z}{4\pi i Z}\sum_{m=0}^{t}\left(\frac{1}{2}\right)^t\binom{t}{m}\left(Z^{2m-t+k} + Z^{2m-t-k}\right)\\
=&\left(\frac{1}{2}\right)^t\binom{t}{\frac{t+k}{2}}
\end{aligned}$$

$$=P_{t,0} \tag{۴۶.۳}$$

بنا بر این اگر مقصدِ نهایی رویِ دیوار باشد، دیوار منعکس‌کننده در احتمالِ یافتنِ ول‌گرد در آن نقطه تاثیری ندارد.

### ۴.۱.۳ ول‌گشتِ متقارن در حضورِ دیوارِ کاملاً جاذب

در بخشِ قبل اثرِ دیوارِ کاملاً منعکس‌کننده رویِ حرکتِ یک ول‌گرد را بررسی کردیم. در این بخش فرض می‌کنیم دیوارِی کاملاً جاذب در مبدا است . در حالت کلی می‌توانیم ترکیبی از این حالت‌ها و حالت‌هایِ پیچیده‌تر را هم با این روش‌ها مطالعه کرد، در واقع برهم‌کنش‌هایِ متفاوت را با تغییرِ شرایطِ مرزی می‌توان بررسی کرد. در این‌جا می‌خواهیم احتمالِ پیدا کردنِ ول‌گرد در زمانِ $t$ و در مکانِ $s$ در حضورِ دیواری جاذب در مبدا که با $\tilde{P}_{t,s}$ نشان می‌دهیم را به دست آوریم. منظور از دیوارِ جاذب این است که وقتی ذره به دیوار می‌رسد با احتمالِ یک به دیوار می‌چسبد. اگر دیوار نبود ذره با احتمالِ $1/2$ به راست و با احتمالِ $1/2$ به چپ می‌رفت. متناظر با مکانِ نهاییِ $s$ تصویرِ آن در $-s$ وجود دارد. برایِ مسیرهای که نقطه تقاطعی با دیوار دارند ، متناظر با هر قدم تصویرِ آن قدم وجود دارد. از آن‌جا که چسبیدنِ دیوار با احتمالِ یک صورت می‌گیرد یعنی اثرِ وجود دیوار حذفِ این مسیر است. احتمالِ پیدا کردنِ ول‌گرد در زمانِ $t$ و در مکانِ $s$ در حضورِ دیواری در مبدا

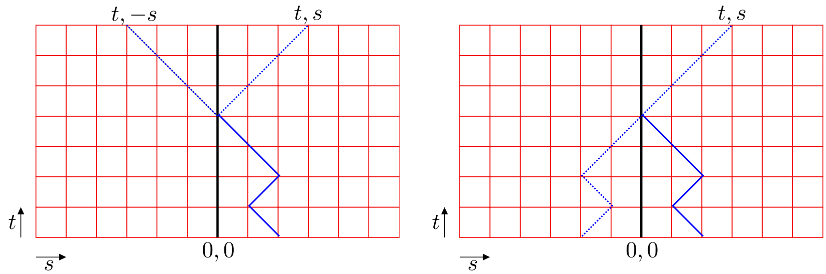
$$\tilde{P}_{t,s} = P_{t,s} - P_{t,-s} \tag{۴۷.۳}$$

است که $P_{t,s}$ احتمالِ پیدا کردنِ ول‌گرد در زمانِ $t$ و در مکانِ $s$ در غیابِ دیوار است. شکلِ ۳.۳ را ببینید.

راهِ دیگرِ بررسیِ این مساله استفاده از معادله‌یِ مادر با شرطِ مرزیِ مناسب است. معادله‌یِ مادر برایِ این مساله

$$\tilde{P}_{t+1,s} = \frac{1}{2}\tilde{P}_{t,s-1} + \frac{1}{2}\tilde{P}_{t,s+1}, \quad s \neq 0,1 \tag{۴۸.۳}$$

$$\tilde{P}_{t+1,1} = \frac{1}{2}\tilde{P}_{t,2}, \tag{۴۹.۳}$$




شکل ۳.۳ ولگشتِ در حضورِ یک دیوارِ جاذب. چون وقتی ولگرد به دیوار می‌رسد، چسبیدن به دیوار با احتمالِ یک صورت می‌گیرد کافی است همه‌یِ مسیرهایِ ولگرد در غیابِ دیوار را در نظر بگیریم و آن‌هایی که مسیر از مبدا می‌گذرد حذف کنیم.

$$\tilde{P}_{t+1,0} = \tilde{P}_{t,0} + \frac{1}{2}\tilde{P}_{t,1}, \tag{۵۰.۳}$$

که دو معادله‌یِ آخر در واقع شرطِ مرزی هستند. همان‌طور که می‌بینید شرایطِ مرزی در این حالت با دیوارِ منعکس‌کننده متفاوتند. شرطِ اولیه را $\tilde{P}_{t,s}\big|_{t=0} = \delta_{s,k}$ می‌گیریم. برایِ حلِ این مساله هم از روشِ جداسازی‌یِ متغیرها استفاده می‌کنیم.

$$\tilde{P}_{t,s} \sim T_t\psi_s \tag{۵۱.۳}$$

شبیهِ حالتِ قبل می‌رسیم به

$$T_{t+1} = U^{t+1}T_0, \tag{۵۲.۳}$$

و

$$U\psi_s = \frac{1}{2}\left(\psi_{s-1} + \psi_{s+1}\right), \tag{۵۳.۳}$$

شرایطِ مرزی تبدیل می‌شوند به

$$U\psi_1 = \frac{1}{2}\psi_2, \tag{۵۴.۳}$$

$$U\psi_0 = \psi_0 + \frac{1}{2}\psi_1. \tag{۵۵.۳}$$

با استفاده از نهاده‌یِ $\psi_s \sim Z^s$ به عنوانِ جواب می‌رسیم به

$$U = \frac{1}{2}(Z + Z^{-1}), \tag{۵۶.۳}$$

که مشابهِ حالتِ قبل است. پس مجدداً جوابِ ممکن برایِ $Z$ فاز است.
جوابِ کلی‌یِ (۵۳.۳) عبارت است از

$$\psi_s = C_1 Z^s + C_2 Z^{-s}, \qquad s \neq 0. \tag{۵۷.۳}$$

با جاگذاری‌یِ این جواب در شرایطِ مرزی‌یِ (۵۴.۳) نتیجه می‌شود

$$C_2 = -C_1, \tag{۵۸.۳}$$

$$\psi_0 = C_1 \frac{Z^{1/2} + Z^{-1/2}}{Z^{1/2} - Z^{-1/2}} \tag{۵۹.۳}$$

پس به طور خلاصه داریم

$$\psi_s = C_1(Z^s - Z^{-s}), \qquad s \neq 0 \tag{۶۰.۳}$$

$$\psi_0 = C_1 \frac{Z^{1/2} + Z^{-1/2}}{Z^{1/2} - Z^{-1/2}}, \tag{۶۱.۳}$$

یا با جای‌گذاری‌یِ $Z = \mathrm{e}^{i\theta}$

$$\psi_s = 2iC_1 \sin s\theta, \qquad s \neq 0 \tag{۶۲.۳}$$

$$\psi_0 = -iC_1 \cot\frac{\theta}{2}, \tag{۶۳.۳}$$

به همراهِ

$$U = \cos\theta. \tag{۶۴.۳}$$

در این‌صورتِ جوابِ مساله عبارت است از

$$\tilde{P}_{t,s} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, A(\theta) \sin s\theta \cos^t\theta, \quad s \neq 0, \tag{۶۵.۳}$$

$$\tilde{P}_{t,0} = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, A(\theta) \cot\frac{\theta}{2}\, \cos^t\theta. \tag{۶۶.۳}$$

با استفاده از شرطِ اولیه می‌توانیم $A(\theta)$ را به دست آوریم. مثلاً با شرطِ اولیه‌یِ

$$\tilde{P}_{t,s}\big|_{t=0} = \delta_{s,k} \tag{۶۷.۳}$$

می‌رسیم به

$$\delta_{s,k} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, A(\theta) \sin s\theta, \quad s \neq 0 \tag{۶۸.۳}$$

که نتیجه می‌دهد

$$A(\theta) = \frac{1}{\pi}\sin k\theta. \tag{۶۹.۳}$$

پس

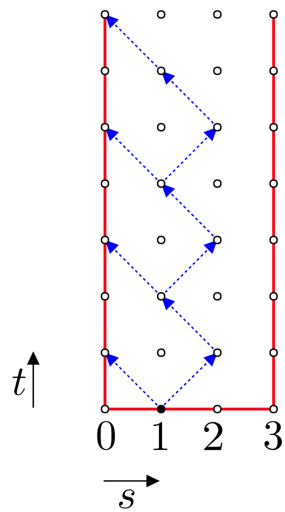
$$\tilde{P}_{t,s} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, \sin k\theta\, \cos s\theta\, \cos^t\theta, \quad s \neq 0, \tag{۷۰.۳}$$

$$\tilde{P}_{t,0} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, \cot\frac{\theta}{2}\, \sin k\theta\, \cos^t\theta. \tag{۷۱.۳}$$

### ۵.۱.۳ ولگشت با دو دیوارِ جاذب

مساله را با یک مثالِ ساده شروع کنیم. دو دیوارِ جاذب در $s = 0$ و $s = 3$ در نظر می‌گیریم. شکلِ را ببینید. ولگرد از $s = 1$ شروع می‌کند. ابتدا حالتی که در مبدا یعنی دیوارِ سمتِ چپ گیر بیفتد را بررسی کنیم. ممکن است در همان ابتدا یک قدم به عقب برود و در دیواری که در مبدا است گیر بیفتد. ممکن هم هست که در سه قدم در مبدا گیر بیفتد. احتمالِ این‌که بالاخره در مبدا یعنی دیوارِ سمتِ چپ گیر بیفتد $P_L$ جمعِ همه‌یِ این امکان‌هاست

$$\begin{aligned} P_L =& \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \cdots \\ =& \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots\right) \end{aligned}$$




شکل ۴.۳ ولگشتِ در حضورِ دو دیوارِ جاذب.

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-1/4}\right)=\frac{2}{3}. \tag{۷۲.۳}$$

با استدلالی مشابه، احتمالِ گیر افتادن در دیوارِ سمتِ راست، $P_R$ در $s=3$، برابر است با $P_R=\frac{1}{3}$. همان‌طور که پیداست جمعِ احتمالِ جذب شدن به دیوارها ۱ است، یعنی این‌که ولگرد نمی‌تواند بینِ دو دیوارِ جاذب به زندگیِ خودش ادامه دهد و نهایتا به یکی از دیوارها می‌چسبد. حالا ببینیم میانگین زمانی که ولگرد می‌تواند بدون جذب شدن به دیوارها به حرکتش ادامه دهد، که آن را با $T_s$ نمایش می‌دهیم چه‌قدر است. این زمان از رابطه‌یِ زیر به دست می‌آید

$$T_s=1\times\frac{1}{2}+2\times(\frac{1}{2})^2+3\times(\frac{1}{2})^3+\cdots \tag{۷۳.۳}$$

$$=\sum_{n=1}n(\frac{1}{2})^n=2. \tag{۷۴.۳}$$

در این محاسبه از

$$\sum_{n=0}x^n=\frac{1}{1-x} \tag{۷۵.۳}$$

$$\sum_{n=0}nx^n=x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{1}{1-x})=\frac{x}{(1-x)^2} \tag{۷۶.۳}$$

استفاده کرده‌ایم.

مثال ۳.۱.۳. همان‌طور که نشان دادیم، پس از مدتی بالاخره ذره جذبِ یکی از دیوارها شده است. فرض کنید آنسامبلی از این دستگاه ساخته‌ایم و زمانِ میان‌گینِ بخشی از آنسامبل که به دیوارِ سمتِ چپ جذب شده را با $T_L$ و زمانِ مربوط به دیوارِ سمتِ راست را با $T_R$ نشان می‌دهیم. این زمان‌ها را به دست آورید.

یک تعمیمِ ساده‌ی این مدل زیاد کردنِ فاصله‌ی دو دیوارِ جاذب است. یکی از دیوارها در مبدا و دیگری را در جای‌گاهِ $N$ بگیریم و فرض کنیم ول‌گرد از جای‌گاهِ $n$اُم شروع می‌کند. در قدمِ اول به جای‌گاهِ $n-1$ و یا جای‌گاهِ $n+1$ می‌رود. در این‌صورت احتمالِ آن‌که از جای‌گاهِ $n$اُم شروع کند و جذبِ دیوارِ سمتِ راست شود، $R_n$ در معادله‌ی تفاضلی

$$R_n = \frac{1}{2} R_{n-1} + \frac{1}{2} R_{n+1} \tag{۷۷.۳}$$

صدق می‌کند. اگر از خودِ دیوارها شروع کند احتمالِ جذب شدن به دیوارِ سمتِ راست به قرارِ زیر است

$$R_N = 1, \quad R_0 = 0. \tag{۷۸.۳}$$

این دو را می‌توانیم به عنوانِ شرطِ مرزی برای معادله‌ی تفاضلی‌ِ (۷۷.۳) بگیریم. برای حلِ (۷۷.۳) از نهاده‌ی $R_n \sim C Z^n$ استفاده می‌کنیم که با جاگذاری نتیجه می‌دهد

$$Z + Z^{-1} = 2. \tag{۷۹.۳}$$

هر دو جوابِ این معادله‌ی درجه‌ی دو $Z = 1$ است. پس جوابِ کلی‌ِ (۷۷.۳) عبارت است از

$$R_n = (C_1 + nC_2) Z^n = C_1 + nC_2. \tag{۸۰.۳}$$

است. با استفاده از شرایطِ مرزی نتیجه می‌شود

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{N}, \tag{۸۱.۳}$$

پس

$$R_n = \frac{n}{N}. \tag{۸۲.۳}$$

با استدلالی مشابه احتمالِ جذب‌شدن در دیوارِ چپ

$$L_n = \frac{N-n}{N}. \tag{۸۳.۳}$$

در این حالت نیز مستقل از اندازه‌یِ $N$،

$$R_n + L_n = 1. \tag{۸۴.۳}$$

بنابراین احتمالِ جذب به دیوارها ۱ و احتمالِ گیر نیفتادن حتی برایِ $N$هایِ بزرگ هم صفر است. حالا می‌توانیم به سوالِ دیگری بپردازیم: چه مدت طول می‌کشد تا جذب یکی از دیوارها شود یا چه مدت زمان قبل از جذب به دیوارها (که حتماً رخ می‌دهد) فرصت دارد. میانگینِ زمانِ گیر نیفتادنِ ول‌گرد اگر از جای‌گاهِ $n$ شروع کند را $T_n$ بگیریم. در این صورت $T_0 = T_N = 0$ است. بعد از گذشتنِ یک واحدِ زمان ول‌گرد یا در جای‌گاهِ $n$ است یا جای‌گاهِ $n+1$. توجه داریم که یک واحد زمان برایِ این فرآیند سپری شده و احتمالِ رفتن به هر جای‌گاه هم $1/2$ است. پس

$$T_n = 1 + \frac{1}{2}T_{n-1} + \frac{1}{2}T_{n+1}. \tag{۸۵.۳}$$

معادله‌یِ بالا معادله‌یِ تفاضلی‌یِ غیرهم‌گن است، که جوابی عمومی دارد و برایِ آن لازم است که یک جوابِ خصوصی پیدا کنیم. جوابِ عمومی‌یِ آن

$$T_n^g = \alpha + \beta n. \tag{۸۶.۳}$$

این معادله شبیهِ معادله‌یِ دیفرانسیلِ مرتبه‌یِ دو مثلِ $y'' = -2$ است، که جوابِ این معادله $y = -x^2$ است. حدسی که برایِ جوابِ خصوصی‌یِ معادله‌یِ (۸۵.۳) می‌زنیم $T_n^p = -\gamma n^2$ است که با جاگذاری در معادله $\gamma = 1$ به دست می‌آید.e پس

$$T_n = \alpha + \beta n - n^2 \tag{۸۷.۳}$$

با استفاده از شرایطِ مرزیِ $T_0 = T_N = 0$ ثابت‌های $\alpha = 0$ و $\beta = N$ به دست می‌آیند

$$T_n = n(N-n). \tag{۸۸.۳}$$

در حدِّ $N \to \infty$ زمانِ میانگینِ جذب نشدن به دیوارها به سمتِ بی‌نهایت می‌رود، یعنی هر چند حتماً بالاخره جذبِ دیوارها خواهد شد، این زمان به طور میانگین به بی‌نهایت می‌رود.

مثالی از مساله‌ی ول‌گشت در حضورِ دو دیوارِ جاذب، مساله‌ی شرط‌بندی است. قمارباز با $n$ واحد پول شروع می‌کند. در هر شرط‌بندی یا یک واحد پول می‌برد یا همین اندازه می‌بازد. هرگاه پولش به $N$ واحد رسید یا این‌که همه‌ی پولش تمام شد به خانه برمی‌گردد. در این‌صورت احتمالِ این‌که برنده به خانه برگردد $\frac{n}{N}$ و احتمالِ آن‌که همه‌ی پولش را ببازد $\frac{N-n}{N}$ است، مثلاً اگر با ۱۰۰ واحدِ پول شروع کند و قرارش این باشد که یا با ۲۰۰ واحد پول برگردد یا هیچ، احتمالِ برنده شدن ۵۰ درصد است. اگر با ۱۰۰۰ واحدِ پول شروع کند با احتمالِ $\dfrac{1000}{1100}$ یعنی ۹۱ درصد برنده به خانه برمی‌گردد. در حدِّ $N$های بزرگ تقریباً همیشه برنده برمی‌گردد. اما توجه داشته باشیم که این نتایج با فرض مشابه‌سازی‌ی قمار با ول‌گشتِ متقارن است. در مساله‌ی واقعی‌تر کازینو سهمی برای خودش برمی‌دارد به طوری‌که مساله بیش‌تر شبیهِ ول‌گشتِ نامتقارن است. مثلاً احتمالِ برنده‌شدن در هر شرط‌بندی، $p$، ۴۸ درصد و احتمالِ بازنده‌شدن در هر شرط‌بندی، $q$، ۵۲ درصد است. در وهله‌ی اول به نظر می‌رسد این بازی هنوز نسبتاً منصفانه است. حالا بیایید این مطلب را بررسی کنیم. احتمالِ این‌که اگر از جای‌گاهِ $n$ شروع کند و نهایتاً جذبِ دیوارِ سمتِ راست شود (یا به زبانِ شرط‌بندی با $n$ واحد پول شروع کند و نهایتاً پولش $N$ شود)

$$R_n = qR_{n-1} + pR_{n+1} \tag{۸۹.۳}$$

شرایطِ مرزی هم عبارتند از

$$R_0 = 0, \quad R_N = 1. \tag{۹۰.۳}$$

برای حلِ (۸۹.۳) از نهاده‌یِ $R_n \sim CZ^n$ استفاده می‌کنیم که با جاگذاری نتیجه می‌دهد

$$pZ + qZ^{-1} = 1. \tag{۹۱.۳}$$

جوابِ‌هایِ این معادله‌یِ درجه‌یِ دو $Z = 1, q/p$ هستند و جوابِ کلی‌یِ (۸۹.۳) عبارت است از

$$R_n = C_1 + C_2(q/p)^n, \tag{۹۲.۳}$$

که با استفاده از شرایطِ مرزی می‌رسیم به

$$C_1 + C_2 = 0, \tag{۹۳.۳}$$

$$C_1 + C_2(\frac{q}{p})^N = 1. \tag{۹۴.۳}$$

با جمع و جور کردنِ این‌ها می‌رسیم به

$$R_n = \frac{(\frac{q}{p})^n - 1}{(\frac{q}{p})^N - 1} \tag{۹۵.۳}$$

حالا با فرضِ $p = 0.48, q = 0.52$ مثلاً اگر با ۱۰۰ واحدِ پول شروع کند و قرارش این باشد که یا با ۲۰۰ واحد پول برگردد یا هیچ، احتمالِ برنده شدن تقریباً $\frac{1}{37649.6}$ است. اگر با ۱۰۰۰ واحدِ پول شروع کند احتمالِ برنده‌شدن تقریباً همان $\frac{1}{37648.6}$ است و در حدِّ $N$های بزرگ با هر پولی شروع کند تقریباً همیشه بازنده برمی‌گردد. در واقع برایِ حالتِ نامتقارن و مستقل از این که با چه‌قدر پول شروع کند، فقط در صورتی که $(\frac{q}{p})^n \gg 1$ باشد، به نتیجه زیر می‌رسیم

$$R_n \approx (\frac{q}{p})^{n-N}. \tag{۹۶.۳}$$

دیدیم که قمارباز با احتمالی تقریباً برابرِ با ۱ بی‌پول به خانه برمی‌گردد. ببینیم اگر او با $n$ واحد پول شروع کند، چه‌مدت را صرفِ قمار کرده است.

$$T_n = 1 + qT_{n-1} + pT_{n+1}, \tag{۹۷.۳}$$

$$T_0 = T_N = 0. \tag{۹۸.۳}$$

جوابِ عمومی‌یِ این معادله

$$T_n^g = \alpha + \beta(\frac{q}{p})^{n-N}. \tag{۹۹.۳}$$

است. جوابِ خصوصی را به صورتِ $T = \gamma n$ می‌گیریم که با جاگذاری در معادله

$$T_n^p = \frac{n}{q-p}, \qquad (۱۰۰.۳)$$

می‌شود. بنا بر این جوابِ کلی عبارت است از

$$T_n = \frac{n}{q-p} + \alpha + \beta(\frac{q}{p})^{n-N}. \qquad (۱۰۱.۳)$$

با استفاده از شرایطِ مرزیِ $T_0 = T_N = 0$ ثابت‌هایِ $\alpha$ و $\beta$ به دست می‌آیند و در نهایت می‌رسیم به

$$T_n = \frac{n}{q-p} - \frac{N}{q-p} \cdot \frac{(\frac{q}{p})^n - 1}{(\frac{q}{p})^N - 1}. \qquad (۱۰۲.۳)$$

در حدِّ $(\frac{q}{p})^n \gg 1$ به نتیجه زیر می‌رسیم

$$T_n \approx \frac{n}{q-p}. \qquad (۱۰۳.۳)$$

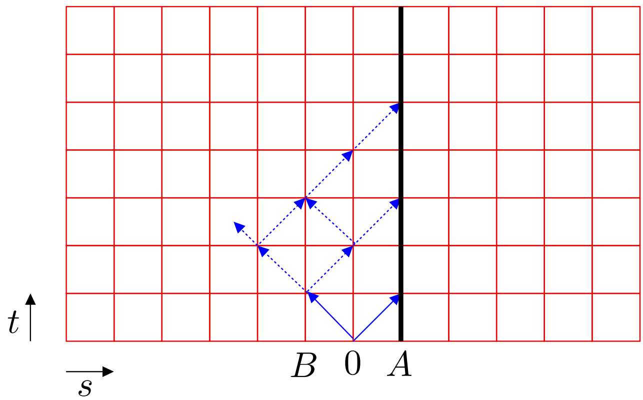
## ۲.۳ اولین زمانِ عبور

یکی از کمیت‌هایِ موردِ علاقه در فرآیندهایِ تصادفی اولین زمانِ عبور[1]، [2] است. این زمان وقتی است که یک متغیرِ تصادفی برایِ اولین بار یک مقدارِ معین را اختیار می‌کند. مثال‌هایِ مختلفی می‌توانیم در نظر بگیریم. مثلاً در یک ماشین ساده یا در پدیده‌یِ ول‌گشت.

### ۱.۲.۳ ول‌گشت

در ول‌گشتِ ساده‌یِ متقارن احتمالِ به راست رفتن و احتمالِ به چپ رفتن برابر است. می‌خواهیم ببینیم احتمالِ آن که ول‌گردی که در ابتدا در مبدا است، بالاخره به یک نقطه‌یِ مشخص مثلاً جای‌گاهِ ۱ برسد، چه‌قدر است؟ ممکن است این کار در همان گامِ اول صورت گیرد. ممکن هم هست که در گام‌هایِ بعدی به این نقطه برسد. اگر ول‌گرد حرکتِ خود را از مبدا شروع کند،

[1] first passing time
[2] first hitting time




شکل ۵.۳ احتمالِ آن که ولگردی ساده که در ابتدا در مبدا بوده، بالاخره به یک نقطه‌یِ مشخص مثلاً جای‌گاهِ ۱ برسد، چه‌قدر است؟

با احتمالِ $1/2$ به نقطه‌ی $1$ می‌رود. ولی با همان احتمال هم ممکن است به نقطه‌یِ $-1$ برود. حالت‌های مختلفی ممکن است: مثلاً در یک گام به نقطه‌ی $1$ برود یا آن‌که در سه گام، یعنی یک گام به عقب و دو گام به جلو به آن برود، و به همین ترتیب می‌تواند با تعداد گام‌های مختلفی به نقطه‌ی $1$ برود . شکلِ ۵.۳ را ببینید . احتمالِ آن که سرانجام به نقطه‌یِ $A$ که در نقطه‌یِ $1$ است، برسد، $f_1$، عبارت است از

$$f_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{2}{32} + \frac{5}{128} + \cdots \qquad (۱۰۴.۳)$$

در پله‌هایِ زمانی‌یِ بعد مساله پیچیده‌تر می‌شود و محاسبه‌یِ این سری سخت است. اما چند نکته را بدون محاسبه نیز می‌توان دریافت. با توجه به تقارنِ چپ و راست در مساله، احتمالِ آن که سرانجام به نقطه‌یِ $B$ که در نقطه‌یِ $-1$ است، برسد، $f_{-1}$، همان $f_1$ است و با توجه به تقارنِ انتقالی‌یِ مساله و با استفاده از تقارنِ چپ و راست در مساله، مستقل از آن‌که از کجا شروع کند، احتمالِ آن‌که سرانجام یک قدم به جلو (یا به عقب) برود همان مقدارِ $f_1$ است.

حالا اگر از مارکفی‌بودنِ فرآیند استفاده کنیم احتمالِ آن که سرانجام $n$ قدم در یک جهت جابه‌جا شده باشد

$$f_n = f_1^n \qquad (۱۰۵.۳)$$

است. به جایِ محاسبه‌یِ جوابِ سری‌ای که برایِ $f_1$ به دست آوردیم یک راه میان‌بر برایِ این مساله وجود دارد. بگذارید از این روش برایِ محاسبه‌یِ $f_1$ استفاده کنیم. از شکل هم پیداست که

$$\begin{aligned} f_1 =& \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_2 \\ =& \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_1^2. \end{aligned} \tag{۱۰۶.۳}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود $f_1 = 1$ یا $f_n = f_1^n = 1$. بنا بر این برایِ ول‌گشتِ متقارن هیچ نقطه‌ای از شبکه نیست که احتمالِ رسیدنِ ول‌گرد به آن غیر از 1 باشد و ول‌گرد با گذشتِ زمان سرانجام به هر نقطه‌ای رویِ شبکه خواهد رسید.

حالا بیایید حالتِ کلی‌تر یعنی ول‌گشتِ نامتقارن را با استفاده از معادله‌ای تفاضلی برایِ $f_n$ بررسی کنیم. اولاً اگر مرزی وجود نداشته باشد مساله تقارنِ انتقالی دارد، یعنی مستقل از آن‌که از کجا شروع کند، احتمالِ آن‌که سرانجام یک قدم به جلو برود همان مقدارِ $f_1$ است. به خاطرِ نامتقارن بودنِ احتمال به چپ و راست رفتن، تقارنِ چپ و راست شکسته می‌شود، یعنی دیگر $f_n$ با $f_{-n}$ برابر نیست.

در محاسبه‌یِ $f_2$ یا ول‌گرد با احتمالِ $p$ جلو می‌رود و در این صورت باید احتمالِ $f_1$ را محاسبه کنیم و یا آن‌که با احتمالِ $q$ عقب می‌رود و در این صورت باید احتمالِ $f_3$ را محاسبه کنیم. به همین ترتیب می‌بینیم که معادله‌یِ حاکم بر $f_n$ عبارت است از

$$f_n = pf_{n-1} + qf_{n+1}, \quad n \geq 0, \tag{۱۰۷.۳}$$

که $f_0 = 1$ را انتخاب کرده‌ایم. برایِ حلِ این معادله‌یِ تفاضلی حدسِ $f_n \sim CZ^n$ را به عنوانِ جواب می‌گیریم. با جای‌گذاریِ این حدس در (۱۰۷.۳) نتیجه می‌شود

$$pZ^{-1} + qZ = 1 \quad \Rightarrow \quad Z = 1, p/q. \tag{۱۰۸.۳}$$

این معادله‌یِ بازگشتی از مرتبه‌یِ دو است و جوابِ کلی‌یِ آن ترکیبِ خطی‌یِ دو جواب است. پس

$$f_n = C_1 Z_1^n + C_2 Z_2^n = C_1 + C_2 (\frac{p}{q})^n, \tag{۱۰۹.۳}$$

که $C_1$ و $C_2$ ثابت هستند. شرطِ مارکفی بودن $f_n = f_1^n$ نتیجه می‌دهد که از دو ثابتِ $C_1$ و $C_2$ یکی صفر و دیگری یک است. واضح است که برایِ $p \geq q$ جواب $f_1 = 1$ است و به همین ترتیب $f_n = f_1^n = 1$. در صورتی که $p < q$ باشد نشان می‌دهیم که جوابِ دیگر یعنی

$$f_n = (\frac{p}{q})^n \tag{۱۱۰.۳}$$

قابلِ قبول است. پس

$$f_n = \begin{cases} 1, & p \geq q \\ (\frac{p}{q})^n, & p < q \end{cases} \tag{۱۱۱.۳}$$

اگر می‌خواستیم $f_n$ را برایِ $p < q$ مستقیم محاسبه کنیم ، باید سهمِ همه‌یِ راه‌هایِ ممکن برایِ اولین‌بار رسیدن از مبدا به نقطه‌یِ $s = n$ را در نظر می‌گرفتیم. محاسبه‌یِ همه‌یِ راه‌هایِ ممکنِ برایِ رسیدن از مبدا به نقطه‌یِ $s = n$ سخت نیست. مشکل کم کردن سهم مواردی است که بیش از یک بار به این نقطه رسیده‌اند. در این صورت $f_n$ چیزی بود شبیهِ

$$f_n = \sum_m A_{m,n} \frac{(2m+n)!}{(m+n)!m!} p^{m+n} q^m \tag{۱۱۲.۳}$$

که $m$ تعدادِ قدمهایِ رو به عقب و $m + n$ تعدادِ قدمهایِ رو به جلو است. قاعدتاً سرجمع به اندازه‌یِ $n$ قدم رو به جلو رفته است. ما تنها حالت‌هایی را در نظر می‌گیریم که فقط یک‌بار به جایگاهِ $s = n$ وارد شده باشد. به همین علت محاسبه‌یِ $A_{m,n}$ کمی پیچیده است. ولی مساله راهِ ساده‌تری دارد. ول‌گشتِ دیگری را در نظر بگیرید که احتمالِ جلو و عقب‌رفتن در آن مساله برعکسِ مساله‌یِ ما باشد، یعنی احتمالِ جلو رفتن در آن مساله $p' = q$ و احتمالِ عقب‌رفتن در آن مساله $q' = p$ باشد. در این صورت

$$f'_n = \sum_m A_{m,n} \frac{(2m+n)!}{(m+n)!m!} q^{m+n} p^m. \tag{۱۱۳.۳}$$

پس

$$\frac{f_n}{p^n} = \frac{f'_n}{q^n}. \tag{۱۱۴.۳}$$

اما می‌دانیم که $f'_n = 1$ است. پس

$$f_n = (\frac{p}{q})^n. \tag{۱۱۵.۳}$$

به طورِ خلاصه در ول‌گشت اگر احتمالِ جلورفتن بزرگ‌تر یا مساوی‌یِ احتمالِ عقب‌رفتن باشد، ول‌گرد سرانجام تمام نقاطِ جلویِ مسیرش را قطعاً خواهد دید، ولی نقاطِ پشتِ سر هرچه دورتر باشند، احتمالِ دیده‌شدنِشان کم‌تر است.

زمانِ رسیدن به جای‌گاهِ $n$اُم را که آن را با $\tau_n$ نمایش می‌دهیم را هم به دست آوریم. توجه داریم که برایِ آن‌که سرانجام به جای‌گاهِ ۲ برسد باید حتماً از جای‌گاه ۱ عبور کرده باشد و چون مساله تقارنِ انتقالی دارد، زمانِ تغییر محل به اندازه‌یِ دو واحد مثل دو تغییرِ محلِ یک واحدی است. پس

$$\tau_2 = 2\tau_1 \tag{۱۱۶.۳}$$

در این صورت

$$\tau_1 = 1 + p \times 0 + q\tau_2 = 1 + 2q\tau_1 \ \Rightarrow\ \tau_1 = \frac{1}{1-2q} = \frac{1}{p-q} \tag{۱۱۷.۳}$$

در حالتِ ول‌گشتِ متقارن $\tau_1 = \infty$ و برایِ وقتی که $p < q$ جوابی برای $\tau_1$ وجود ندارد، یعنی ول‌گرد در زمانِ محدود به طورِ میانگین به جای‌گاهِ ۱ نمی‌رسد. اما اگر $p > q$ باشد، $\tau_1$ مقداری محدود دارد.در این صورت به طورِ خلاصه

$$\tau_n = \begin{cases} \dfrac{n}{p-q}, & p > q \\ \infty, & p \le q. \end{cases} \tag{۱۱۸.۳}$$

می‌توان از احتمالِ بازگشتِ مجدد و همین‌طور زمانِ میانگینِ بازگشت هم صحبت کرد.

## ۳.۳ معادله‌یِ مادر و نمایشِ ماتریسی‌یِ آن

### ۱.۳.۳ فرآیندِ مارکوفی

یک سیستمِ تصادفی را در نظر بگیرید که می‌تواند تعدادی حالت، پیکربندی یا آرایشِ[۱] مختلف را انتخاب کند. احتمالِ این‌که سیستم در زمانِ $t$ در پیکربندیِ $C$ باشد $P(C,t)$ است. معادله‌ای که تحولِ زمانیِ این احتمال را می‌دهد، معادله‌یِ مادر است. احتمالِ گذارِ سیستم به پیکربندیِ $C'$ در زمانِ $t'$ است، به شرطی که در زمانِ $t$ در پیکربندیِ $C$ باشد، عبارت است از

$$P_{C\to C'}(t',t) = P(C',t'|C,t) \tag{۱۱۹.۳}$$

در گذار به حالتِ نهایی سیستم می‌تواند از آرایش‌هایِ مختلف گذشته باشد. علی‌الاصول آرایشِ سیستم در هر زمان به پیکربندیِ آن در زمان‌هایِ گذشته وابسته است، و احتمالِ گذار می‌تواند به مسیری که سیستم در زمان طی کرده، و این‌که چه‌طور به آرایشِ کنونی‌اش رسیده، بستگی داشته باشد. اما اگر تحولِ سیستمی به همه‌یِ پیشینه‌یِ آن وابسته نباشد و برایِ یک تحولِ زمان‌گسسته آرایشِ آن در زمانِ $t_N$ فقط به آرایش در پله‌یِ زمانیِ قبلیِ $t_{N-1}$ وابسته باشد، می‌گوییم تحول مارکوفی[۲] است. اگر آرایشِ سیستم در زمانِ $t_i$ را $C_i$ بگیریم، برایِ فرایندِ مارکوفی داریم

$$P(C_N,t_N|C_{N-1},t_{N-1};C_{N-2},t_{N-2};;\cdots;C_0,t_0) = P(C_N,t_N|C_{N-1},t_{N-1}),$$

که $t_0 < t_1 < \cdots < t_N$ است. در این‌صورت احتمالِ این‌که سیستم در زمانِ $t_N$ در پیکربندیِ $C_N$ باشد

$$\begin{aligned}
P(C_N,t_N) &= \sum_{C_{N-1}} P(C_N,t_N|C_{N-1},t_{N-1})P(C_{N-1},t_{N-1})\\
&= \sum_{C_{N-1},C_{N-2}} P(C_N,t_N|C_{N-1},t_{N-1})P(C_{N-1},t_{N-1}|C_{N-2},t_{N-2})P(C_{N-2},t_{N-2})\\
&= \sum_{C_{N-1},\cdots,C_0} P(C_N,t_N|C_{N-1},t_{N-1})\cdots P(C_1,t_1|C_0,t_0)P(C_0,t_0).
\end{aligned} \tag{۱۲۰.۳}$$

### ۲.۳.۳ نمایشِ ماتریسیِ معادله‌یِ مادر ـ سیستم‌هایِ زمان‌گسسته

تمامِ پیکربندی‌هایِ مختلفِ سیستم را مرتب و شماره‌گذاری می‌کنیم. مثلاً فرض کنید سیستم $N$

---
[۱] Configuration
[۲] Markov Process

حالتِ متمایز دارد. یک فضایِ برداری‌یِ $N$ بُعدی تعریف می‌کنیم که پایه‌هایِ آن

$$\{|e_\alpha\rangle\}, \qquad \alpha = 1, 2, \cdots, N \tag{۱۲۱.۳}$$

هستند که هرکدام از پایه‌ها متناظر با یکی از پیکربندی‌هایِ ممکنِ سیستم است. مثلاً پایه‌یِ $\alpha$اُم را با ماتریسی ستونی که همه‌یِ مولفه‌هایش صفر هستند به جز مولفه‌یِ $\alpha$اُم نشان می‌دهیم. اگر احتمالِ حضورِ سیستم در پیکربندی‌یِ $\alpha$ در پله‌یِ زمانی‌یِ $k$اُم را با $P^\alpha(t_k)$ نمایش دهیم، بردارِ حالتِ سیستم در پله‌یِ زمانی‌یِ $k$اُم برداری است با مولفه‌هایِ $P^\alpha(t_k)$

$$|P(t_k)\rangle = \sum_\alpha P^\alpha(t_k)|e_\alpha\rangle. \tag{۱۲۲.۳}$$

با توجه به این‌که

$$\sum_\alpha P^\alpha(t_k) = 1, \qquad 0 \le P^\alpha(t_k) \le 1, \tag{۱۲۳.۳}$$

هر بردار که جمعِ مولفه‌هایش یک و همه‌گی‌یِ آن‌ها نامنفی باشند، می‌تواند معرف یک بردارِ حالت برایِ سیستم باشد. به برداری با این خواص بردارِ فیزیکی می‌گوییم. می‌توانیم یک فضایِ دوگان با پایه‌هایِ $\{\langle e^\alpha|\}$، هم تعریف کنیم، به طوری‌که

$$\langle e^\alpha|e_\beta\rangle = \delta^\alpha_\beta. \tag{۱۲۴.۳}$$

با تعریفِ بردارِ

$$\langle s| := \sum_\alpha \langle e^\alpha|, \tag{۱۲۵.۳}$$

روابطِ ۱۲۲.۳ و ۱۲۳.۳ را به صورتِ زیر هم می‌توان نوشت

$$\langle e^\alpha|P(t_k)\rangle = P^\alpha(t_k), \tag{۱۲۶.۳}$$

$$\langle s|P(t_k)\rangle = 1. \tag{۱۲۷.۳}$$

مثال ۱.۳.۳. سیستمی در نظر بگیرید که می‌تواند سه حالتِ مختلف اختیار کند. فضایِ برداری سه‌بُعدی و پایه‌ها عبارت هستند از

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad |e_2\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad |e_3\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}. \qquad (۱۲۸.۳)$$

بردارِ حالتِ سیستم در زمانِ $t$ عبارت است از

$$|P(t_k)\rangle = \begin{pmatrix}P^1(t_k)\\P^2(t_k)\\P^3(t_k)\end{pmatrix}, \qquad (۱۲۹.۳)$$

که $P^\alpha(t_k)$ احتمالِ حضورِ سیستم در پیکربندی‌یِ $\alpha$اُم در پله‌یِ زمانی‌یِ $k$اُم است. در این مثال

$$\langle s| = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}. \qquad (۱۳۰.۳)$$

احتمالِ شرطی‌یِ $P(\beta, t_k|\alpha, t_{k-1})$، احتمالِ گذارِ سیستم از حالتِ $\alpha$ در پله‌یِ زمانی‌یِ $t_{k-1}$ به حالتِ $\beta$ در پله‌یِ زمانی‌یِ $t_k$ برود. در این‌صورت برایِ یک پله‌یِ زمانی

$$P^\beta(t_k) = \sum_\alpha P(\beta, t_k|\alpha, t_{k-1}) P^\alpha(t_{k-1}). \qquad (۱۳۱.۳)$$

ماتریسِ تحولِ تصادفی‌یِ $U$ با رابطه‌یِ زیر تعریف می‌شود

$$\langle e^\beta|U(t_k, t_{k-1})|e_\alpha\rangle := P(\beta, t_k|\alpha, t_{k-1}), \qquad t_k \geq t_{k-1}. \qquad (۱۳۲.۳)$$

با استفاده از ۱۲۶.۳ و ۱۳۲.۳، معادله‌یِ ۱۳۱.۳ را می‌توانیم به شکلِ زیر هم بنویسیم

$$\langle e^\beta|P(t_k)\rangle = \sum_\alpha \langle e^\beta|U(t_k, t_{k-1})|e_\alpha\rangle\langle e^\alpha|P(t_{k-1})\rangle, \qquad (۱۳۳.۳)$$

یا

$$|P(t_k)\rangle = U(t_k, t_{k-1})|P(t_{k-1})\rangle. \qquad (۱۳۴.۳)$$

از این‌جا چند نتیجه می‌توان گرفت.

- $U(t_k,t_k)=\mathbb{1}$. که $\mathbb{1}$ ماتریسِ واحد است.
- برایِ $t_k \geq t_{k-1} \geq t_{k-2}$، $|P(t_{k+1})\rangle$ را به دو طریق می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}|P(t_k)\rangle =&U(t_k,t_{k-1})|P(t_{k-1})\rangle = U(t_k,t_{k-1})U(t_{k-1},t_{k-2})|P(t_{k-2})\rangle.\\ =&U(t_k,t_{k-2})|P(t_{k-2})\rangle.\end{aligned} \quad (۱۳۵.۳)$$

پس

$$U(t_k,t_{k-2}) = U(t_k,t_{k-1})U(t_{k-1},t_{k-2}). \quad (۱۳۶.۳)$$

اگر دو طرفِ رابطه‌یِ ۱۳۴.۳ را در $\langle s|$ ضرب کنیم و از ۱۲۷.۳ استفاده کنیم، نتیجه می‌شود

$$\langle s|U(t_k,t_{k-1})|P(t_{k-1})\rangle = 1. \quad (۱۳۷.۳)$$

با استفاده از این‌که این رابطه برایِ هر توزیعِ احتمالی درست است و ۱۲۷.۳ نتیجه می‌شود

$$\langle s|U(t_k,t_{k-1}) = \langle s|. \quad (۱۳۸.۳)$$

بنابراین $\langle s|$ ویژه‌بردارِ چپِ $U(t_k,t_{k-1})$ با ویژه‌مقدارِ 1 است. از طرفِ دیگر نتیجه می‌گیریم که جمعِ اعضایِ هر ستونِ ماتریسِ $U$ برابر با 1 است. از قبل هم می‌دانستیم که عناصرِ ماتریسِ $U$ احتمال‌هایِ شرطی هستند، پس حتماً مثبت هستند. پس به طورِ خلاصه ماتریسِ مربعیِ $U$ این خواص را دارد

$$0 \leq \langle e^i|U|e_j\rangle \leq 1, \quad (۱۳۹.۳)$$

$$\langle s|U = \langle s| \quad (۱۴۰.۳)$$

$$|P(t_k)\rangle = U(t_k,t_{k-1})|P(t_{k-1})\rangle \quad (۱۴۱.۳)$$

دو شرطِ اول تعریفِ یک ماتریسِ تصادفی[۱] است.

---

[۱] Stochastic Matrix

قضیه ۲.۳.۳

- هر ماتریسِ تصادفی حداقل یک ویژه‌مقدارِ $1$ دارد که بزرگ‌ترین ویژه‌مقدارِ است. ویژه‌بردارِ چپِ متناظر با این ویژه‌مقدار $\langle s|$ است.
- اندازه‌یِ بقیه‌یِ ویژه‌مقادیر کوچک‌تر یا مساوی با $1$ است.
- ویژه‌بردارِ راستِ متناظر با ویژه‌مقدارِ $1$ برداریِ فیزیکی است. این ویژه‌بردار حالتِ پایایِ سیستم است. اگر ویژه‌مقدارِ $1$ تبه‌گن باشد، حالتِ نهایی یک‌تا نیست و به شرایطِ اولیه بستگی دارد. اگر ویژه‌مقدارِ $1$ یک‌تا باشد، حالتِ نهایی هم یک‌تا است و به شرایطِ اولیه بستگی ندارد.
- مزدوجِ مختلطِ هر ویژه‌مقدارِ مختلط هم ویژه‌مقدار است.

این را قبلاً دیدیم که هر ماتریسِ تصادفی حداقل یک ویژه‌مقدارِ $1$ دارد اما چرا این ویژه‌مقدار بزرگ‌ترین ویژه‌مقدارِ است و بقیه ویژه‌مقدارها کوچک‌تر یا مساوی با $1$ هستند؟ ویژه‌مقدارهایِ ماتریسِ $U$ را با $\lambda_\alpha$ و ویژه‌بردارهایِ راست آن را با $|u_\alpha\rangle$ نشان می‌دهیم. حالا اگر معادله‌یِ ویژه‌مقداری‌یِ زیر را

$$\lambda_\alpha|u_\alpha\rangle = U|u_\alpha\rangle, \tag{۱۴۲.۳}$$

به صورتِ مولفه‌ای بنویسیم

$$\lambda_\alpha\langle e^j|u_\alpha\rangle = \sum_i \langle e^j|U|e_i\rangle\langle e^i|u_\alpha\rangle, \tag{۱۴۳.۳}$$

اندازه‌یِ دو طرفِ معادله‌یِ ۱۴۳.۳ برابرند. پس

$$\begin{aligned} |\lambda_\alpha|\,|\langle e^j|u_\alpha\rangle| &= |\sum_i \langle e^j|U|e_i\rangle\langle e^i|u_\alpha\rangle| \\ |\lambda_\alpha|\,|\langle e^j|u_\alpha\rangle| &\leq \sum_i |\langle e^j|U|e_i\rangle\langle e^i|u_\alpha\rangle|. \end{aligned} \tag{۱۴۴.۳}$$

در سمتِ راستِ رابطه‌یِ آخر از نامساویِ مثلث[۱] $|a+b| \leq |a|+|b|$ یا در واقع حالتِ کلی‌تر

[۱] triangle inequality

آن

$$|\sum_i a_i| \leq \sum_i |a_i|, \tag{۱۴۵.۳}$$

استفاده کرده‌ایم. با توجه به این‌که عناصرِ ماتریسِ تحولِ $U$ مثبت هستند می‌توانیم آن‌ها را از علامتِ قدرِ مطلق خارج کنیم. حالا اگر رویِ شاخصِ $i$ یعنی رویِ عناصرِ سطر جمع ببندیم

$$\sum_j |\lambda_\alpha|\,|\langle e^j|u_\alpha\rangle| \leq \sum_j \sum_i \langle e^j|U|e_i\rangle\,|\langle e^i|u_\alpha\rangle|. \tag{۱۴۶.۳}$$

حالا اگر از $\sum_j \langle e^j|U|e_i\rangle = 1$ استفاده کنیم، می‌رسیم به

$$|\lambda_\alpha| \sum_j |\langle e^j|u_\alpha\rangle| \leq \sum_i \langle e^i|u_\alpha\rangle| \quad \Rightarrow \quad |\lambda_\alpha| \leq 1. \tag{۱۴۷.۳}$$

عمل‌گرِ $U(t_k, t_{k-1})$ خیلی شبیهِ عمل‌گرِ تحولِ زمانی در کوانتم‌مکانیک است. البته توجه داریم که این ماتریس لزوماً یکانی نیست. در مکانیکِ کوانتمی عناصرِ بردارِ حالت دامنه‌هایِ احتمال بودند، در حالی‌که در این‌جا این عناصر احتمال هستند. در ضمن شرطِ بهنجارش نیز در این دو مورد متفاوت است. یکی از ویژه‌مقادیرِ $U$ که 1 است و ویژه‌بردارِ چپِ متناظر با آن را به دست آوردیم. اما چون این ماتریس لزوماً هرمیتی نیست ممکن است ویژه‌بردارهایِ چپ و راستِ آن متفاوت باشند. علاوه بر این به جز ویژه‌مقدارِ 1 ممکن است ویژه‌مقادیرِ ماتریسِ تحول مختلط هم باشند. جمعِ عناصرِ هر ستونِ $U$ برابر با 1 است، ولی لزومی ندارد جمعِ هر سطرش هم 1 باشد. بقیه‌یِ ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارها چه هستند؟ تعبیرِ این ویژه‌مقادیر و ویژه‌توابعِ متناظر با آن‌ها چیست؟ اگر خودمان را محدود به سیستم‌هایِ مستقل از زمان بکنیم، در این‌صورت ماتریسِ $U$ هم مستقل از زمان می‌شود و پس از $n$ پلیه‌یِ زمانی

$$|P(t_n)\rangle = U^n|P(t_0)\rangle. \tag{۱۴۸.۳}$$

اگر ویژه‌مقدارهایِ ماتریسِ $U$ را با $\lambda_\alpha$ و ویژه‌بردارهایِ راست (چپ) آن را با $|u_\alpha\rangle$ ($\langle u^\alpha|$) نشان دهیم

$$U = \sum_\alpha \lambda_\alpha |u_\alpha\rangle\langle u^\alpha|. \tag{۱۴۹.۳}$$

در این‌صورت

$$U^n = \sum_\alpha \lambda_\alpha^n |u_\alpha\rangle\langle u^\alpha|. \qquad (۱۵۰.۳)$$

توجه داشته باشید تمام ویژه‌مقادیری که اندازه‌شان کوچک‌تر از $1$ است وقتی به توانِ عددی بزرگ می‌رسند، به صفر میل می‌کنند و ویژه‌بردارِ متناظر با آن‌ها در حالتِ نهایی نقشی ندارد. برایِ به دست آوردنِ بردارِ حالت در زمانِ دل‌خواهِ $t_n$ کافی است بردارِ حالت را برحسبِ ویژه‌بردارهایِ عمل‌گرِ تحولِ زمان، $U$ بسط دهیم

$$|P(0)\rangle = \sum_\alpha P_\alpha(0)|u_\alpha\rangle. \qquad (۱۵۱.۳)$$

در این‌صورت بردارِ حالت در زمانِ دل‌خواهِ $t_n$ عبارت است از

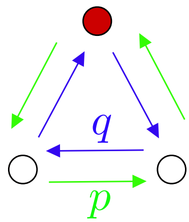
$$\begin{aligned} |P(t_n)\rangle =& U^n \sum_\alpha P_\alpha(0)|u_\alpha\rangle \\ =& \sum_\beta \lambda_\beta^n |u_\beta\rangle\langle u^\beta| \sum_\alpha P_\alpha(0)|u_\alpha\rangle \\ =& \sum_\alpha \lambda_\alpha^n P_\alpha(0)|u_\alpha\rangle. \qquad (۱۵۲.۳) \end{aligned}$$

در این‌جا از ۱۲۴.۳ استفاده کرده‌ایم. پس از زمانِ طولانی تنها جملاتی از این سری که متناظر با ویژه‌مقدارهایِ با اندازه‌یِ $1$ هستند باقی می‌مانند. اگر ویژه‌مقدارِ $1$ تبه‌گن نباشد

$$|P(\infty)\rangle = P_1(0)|u_1\rangle, \qquad (۱۵۳.۳)$$

که $\langle u^1|$ همان بردارِ $\langle s|$ و $|u_1\rangle$ بردارِ دوگانِ $\langle s|$ و هر دو ویژه‌بردارهایِ چپ و راستِ $U$ با ویژه‌مقدارِ $1$ هستند.

مثال ۳.۳.۳. ول‌گردی مطابقِ شکلِ ۶.۳ رویِ شبکه‌ای مثلثی با احتمالِ $p$ در جهتِ عقربه‌هایِ ساعت و با احتمالِ $q$ در خلافِ جهتِ عقربه‌هایِ ساعت حرکت می‌کند. ماتریسِ گذار را بنویسید. در دو حالتِ $p = q = \frac{1}{2}$ و $p = \frac{2}{3}, q = \frac{1}{3}$ حالتِ پایا چیست؟




شکل ۶.۳  ول‌گشت رویِ شبکه‌یِ مثلثی. فلش‌هایِ سبزرنگ گذار با احتمالِ $p$ و فلش‌هایِ آبی‌رنگ گذار با احتمالِ $q$ هستند.

ماتریسِ تحولِ تصادفی‌یِ $U$ با رابطه‌یِ ۱۳۲.۳ تعریف می‌شود که در آن $P(\beta, t_k|\alpha, t_{k-1})$، احتمالِ گذارِ سیستم از حالتِ $\alpha$ در پله‌یِ زمانی‌یِ $t_{k-1}$ به حالتِ $\beta$ در پله‌یِ زمانی‌یِ $t_k$ است. پس

$$\langle e^i|U|e_j\rangle = P(j \to i) \tag{۱۵۴.۳}$$

$$\langle e^1|U|e_1\rangle = 0, \quad \langle e^1|U|e_2\rangle = p, \quad \langle e^1|U|e_3\rangle = q, \tag{۱۵۵.۳}$$

$$\langle e^2|U|e_1\rangle = q, \quad \langle e^2|U|e_2\rangle = 0, \quad \langle e^2|U|e_3\rangle = p, \tag{۱۵۶.۳}$$

$$\langle e^3|U|e_1\rangle = p, \quad \langle e^3|U|e_2\rangle = q, \quad \langle e^3|U|e_3\rangle = 0, \tag{۱۵۷.۳}$$

و ماتریسِ تحولِ زمانی

$$U := \begin{pmatrix} 0 & p & q \\ q & 0 & p \\ p & q & 0 \end{pmatrix}, \tag{۱۵۸.۳}$$

است. یکی از ویژه‌مقادیرِ این ماتریس 1 و دو ویژه‌مقدارِ دیگر

$$\lambda^{\pm} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{(p-q)\sqrt{3}}{2}, \tag{۱۵۹.۳}$$

هستند. اندازه‌یِ این دو ویژه‌مقدار

$$|\lambda^{\pm}|^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(p-q)^2 = 1 - 3pq \leq 1, \tag{۱۶۰.۳}$$

و برای $n$ های بزرگ $|\lambda^\pm|^n$ به صفر میل می‌کند. پس در حالتی که $(p,q)\neq(0,1)$ هستند، ویژه‌مقدارِ با اندازه‌ی 1 یک‌تاست و ویژه‌بردارِ متناظر با آن که حالت پایا است

$$|P\rangle_\infty \propto \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \tag{۱۶۱.۳}$$

است. پس از زمانِ طولانی مستقل از این‌که سیستم از چه حالتی شروع کند و مقادیرِ $p$ و $q$ چه باشند، با احتمالِ برابر در هر یک از سه حالت است. اما اگر مثلاً $p=1,\ q=0$ باشد، ویژه مقدارها

$$\lambda^1 =1, \tag{۱۶۲.۳}$$
$$\lambda^+ =-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathrm{e}^{i2\pi/3}, \tag{۱۶۳.۳}$$
$$\lambda^- =-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathrm{e}^{-i2\pi/3}, \tag{۱۶۴.۳}$$

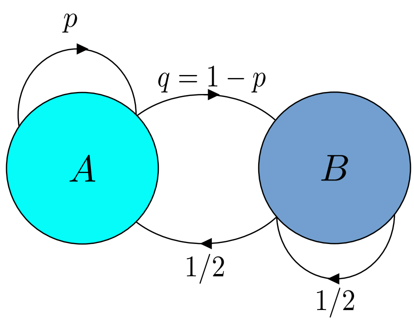
و ویژه‌بردارهایِ چپ و راست

$$\langle u^1|=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}, \qquad |u_1\rangle=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \tag{۱۶۵.۳}$$
$$\langle u^+|=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-i2\pi/3} & \mathrm{e}^{i2\pi/3} & 1\end{pmatrix}, \qquad |u_+\rangle=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{i2\pi/3}\\ \mathrm{e}^{-i2\pi/3}\\ 1\end{pmatrix}, \tag{۱۶۶.۳}$$
$$\langle u^-|=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-i2\pi/3} & \mathrm{e}^{i2\pi/3} & 1\end{pmatrix}, \qquad |u_-\rangle=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{i2\pi/3}\\ \mathrm{e}^{-i2\pi/3}\\ 1\end{pmatrix}, \tag{۱۶۷.۳}$$

هستند. ماتریسِ تحولِ زمانی را می‌توان به شکلِ زیر بسط داد

$$U=\lambda^1|u_1\rangle\langle u^1|+\lambda^+|u_+\rangle\langle u^+|+\lambda^-|u_-\rangle\langle u^-| \tag{۱۶۸.۳}$$

در این حالت اندازه‌یِ هر سه ویژه‌مقدارِ $1=|\lambda^\pm|=\lambda^1$ است و از بینِ ویژه‌بردارهایِ متناظر با آنها یکی پایا و دو تای دیگر معادل حرکت‌های دایره‌ای‌ی ساعت‌گرد و پادساعت‌گرد




شکل ۷.۳ یک ماشینِ دوحالته‌یِ ساده.

هستند. این‌ها حالت‌هایِ ناپایایِ مانا[۱] هستند. حالتِ نهایی به شرایطِ اولیه بستگی دارد. فرض کنید در ابتدا سیستم در حالتِ $1$ است، حالتِ نهایی چیست؟

مثال ۴.۳.۳. ماشینیِ مطابقِ شکلِ ۷.۳ در نظر بگیرید. دستگاه در زمانِ $t = 0$ از حالتِ $A$ شروع می‌کند. پس از زمانِ طولانی دستگاه در چه حالتی است؟ در پله‌یِ زمانی‌یِ $n$ اُم دستگاه در چه حالتی است؟

معادله‌یِ تحولِ ناشی از این ماشین

$$A_{n+1} = pA_n + \frac{1}{2}B_n, \tag{۱۶۹.۳}$$

$$B_{n+1} = qA_n + \frac{1}{2}B_n. \tag{۱۷۰.۳}$$

در حالتِ نهایی $A_{n+1} = A_n$ و $B_{n+1} = B_n$ می‌شود که به همراهِ $A_n + B_n = 1$ برایِ به دست آوردنِ حالتِ نهایی کافی است

$$\lim_{n\to\infty} A_n \sim \frac{1}{1+2q}, \tag{۱۷۱.۳}$$

$$\lim_{n\to\infty} B_n \sim \frac{2q}{1+2q}. \tag{۱۷۲.۳}$$

با تعریفِ بردارِ

$$|P_n\rangle := \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}, \tag{۱۷۳.۳}$$

[۱] Non-Stationary Steady State (NSSS)

عمل‌گرِ تحولِ زمانی

$$U := \begin{pmatrix} p & 1/2 \\ q & 1/2 \end{pmatrix}, \tag{۱۷۴.۳}$$

یک ماتریسِ تصادفی است. می‌توان دید که

$$|P_n\rangle = U|P_{n-1}\rangle = \cdots = U^n|P_0\rangle. \tag{۱۷۵.۳}$$

یکی از ویژه‌مقدارهایِ $U$ یک است. ویژه‌بردارِ متناظر با آن

$$\frac{1}{1+2q}\begin{pmatrix} 1 \\ 2q \end{pmatrix}, \tag{۱۷۶.۳}$$

که از آن نسبتِ $A_n$ و $B_n$ به دست می‌آید. اما ویژه‌مقدارِ دیگرِ آن را از ردِّ

$$\mathrm{Tr}(U) = \lambda_1 + \lambda_2 = p + \frac{1}{2}$$

به سادگی به دست می‌آید که

$$\lambda_2 = p - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - q$$

باشد. ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارهایِ چپ و راستِ ماتریسِ $T$ عبارت‌اند از

$$\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad |1\rangle = \frac{1}{1+2q}\begin{pmatrix} 1 \\ 2q \end{pmatrix}, \tag{۱۷۷.۳}$$

$$\langle 2| = \frac{1}{1+2q}\begin{pmatrix} 2q & -1 \end{pmatrix}, \qquad |2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{۱۷۸.۳}$$

از این‌جا

$$\begin{aligned} |P_n\rangle =& U^n|P_0\rangle = (\lambda_1^n|1\rangle\langle 1| + \lambda_2^n|2\rangle\langle 2|)\,|P_0\rangle, \\ =& \frac{1}{1+2q}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2q & 2q \end{pmatrix} + (\frac{1}{2}-q)^n\begin{pmatrix} 2q & -1 \\ -2q & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ =& \frac{1}{1+2q}\begin{pmatrix} 1+2q(\frac{1}{2}-q)^n \\ 2q-2q(\frac{1}{2}-q)^n \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{۱۷۹.۳}$$

با جاگذاری‌یِ این‌ها در (۱۷۵.۳) نتیجه می‌شود.

$$A_n = \frac{1}{1+2q}\left(1 + 2q(\frac{1}{2} - q)^n\right), \tag{۱۸۰.۳}$$

$$B_n = \frac{2q}{1+2q}\left(1 - (\frac{1}{2} - q)^n\right). \tag{۱۸۱.۳}$$

با توجه به این‌که $|\frac{1}{2} - q| < 1$ است وقتی به توانِ عددِ خیلی بزرگی برسد، خیلی کوچک می‌شود. پس حالتِ نهایی

$$\lim_{n\to\infty} A_n \sim \frac{1}{1+2q}, \tag{۱۸۲.۳}$$

$$\lim_{n\to\infty} B_n \sim \frac{2q}{1+2q}. \tag{۱۸۳.۳}$$

میانگینِ زمانی‌ای که برایِ اولین بار از حالتِ $A$ به حالتِ $B$ برود، چه‌قدر است؟

### ۳.۳.۳ نمایشِ ماتریسی‌یِ معادله‌یِ مادر ـ سیستم‌هایِ زمان‌پیوسته

برایِ سیستم‌هایی که تحولِشان زمان‌گسسته است ، از احتمال‌هایِ گذار استفاده کردیم. برایِ بررسی‌یِ سیستم‌هایی با تحولِ زمان‌پیوسته هر گامِ زمانی را یک بازه‌یِ بی‌نهایت کوچکِ $\delta t$ می‌گیریم، و به‌تر است که به‌جایِ احتمالِ گذار، احتمال در واحدِ زمان یا همان آهنگِ گذار[۱] را درنظر بگیریم. با فرضِ مارکوفی بودنِ تحولِ سیستمِ تصادفی، آهنگِ گذارِ $C \to C'$ را با

$$\omega_{C\to C'} := \lim_{\delta t\to 0} \frac{P(C', t+\delta t|C, t)}{\delta t} \geq 0, \tag{۱۸۴.۳}$$

تعریف می‌کنیم. در ضمن در تعریفِ بالا صورتِ کسر عددی مثبت و کوچک‌تر از یک است. بُعدِ آهنگِ گذار عکسِ زمان است و لازم نیست که کوچک‌تر از ۱ باشد. پس از گذشتِ زمانِ $\delta t$ احتمالِ گذار از حالتِ $C$ به حالتِ $C'$، $\omega_{C\to C'}\,\delta t$ و احتمالِ این‌که سیستم هنوز در آرایشِ $C$

---
[۱] Transition Rate

باشد

$$P_{C\to C}(t+\delta t,t) = 1-\sum_{C'\neq C} P_{C\to C'}(t+\delta t,t) \quad (۱۸۵.۳)$$
$$= 1-\sum_{C'\neq C} \omega_{C\to C'}\,\delta t, \quad (۱۸۶.۳)$$

است.

برایِ یک سیستمِ تصادفی، با تحولِ زمان‌پیوسته و مارکوفی، احتمالِ آنکه سیستم در زمانِ $t+\Delta t$ در آرایشِ $C$ باشد برابر است با مجموعِ احتمال‌هایِ گذار از همه‌یِ آرایش‌ها، از جمله $C'=C$، به $C$

$$P(C,t+\delta t) = \sum_{C'} P(C,t+\delta t,C|C',t)P(C',t)$$
$$= \sum_{C'} P_{C'\to C}(t+\delta t,t)P(C',t) \quad (۱۸۷.۳)$$

با جدا کردنِ جمله‌یِ $C'=C$ و استفاده از ۱۸۵.۳ می‌رسیم به

$$P(C,t+\delta t) = P(C,t) - \sum_{C'\neq C}\left(P_{C\to C'}P(C,t) - P_{C'\to C}P(C',t)\right)$$

با تقسیمِ دو طرف بر $\delta t$ در حدِ $\delta t\to 0$، معادله‌یِ مادر به‌دست می‌آید

$$\frac{\partial P(C,t)}{\partial t} = \sum_{C'\neq C}\left(\omega_{C'\to C}P(C',t) - \omega_{C\to C'}P(C,t)\right) \quad (۱۸۸.۳)$$

جمله‌یِ اولِ سمتِ راستِ این معادله که سهمِ گذارهایِ $C'\to C$ برایِ $C'\neq C$ است را جمله‌یِ چشمه[1] و جمله‌یِ دوم که سهمِ گذارهایِ $C\to C'$ برایِ $C'\neq C$ است را جمله‌یِ چاه[2] می‌نامیم. معادله‌یِ مادر را می‌توانیم به شکلِ عمل‌گری و معادله‌ای شبیه به معادله‌یِ شرودینگر درآوریم و معادله‌یِ حاصل را با همان روش‌ها و استفاده از نمایشِ ماتریسی می‌توانیم حل کنیم. در صورتی که تعدادِ حالاتِ ممکن شمارش‌پذیر باشد ابتدا شبیهِ کاری که در موردِ حالتِ زمان‌گسسته

---
[1] Source [2] Sink

انجام دادیم تمامِ پیکربندی‌هایِ مختلفِ سیستم را مرتب و شماره‌گذاری می‌کنیم. تحولِ زمانی‌یِ $|P\rangle_t$ با رابطه‌یِ زیر داده می‌شود

$$\frac{\partial}{\partial t}|P\rangle_t = \sum_{\alpha=1} \frac{\partial P^\alpha(t)}{\partial t}|e_\alpha\rangle$$

که با استفاده از معادله‌یِ مادر تبدیل می‌شود به

$$\frac{\partial}{\partial t}|P\rangle_t = \sum_{\alpha=1}\sum_{\beta\neq\alpha}\Big(\omega_{\beta\to\alpha}P^\beta(t) - \omega_{\alpha\to\beta}P^\alpha(t)\Big)\,|e_\alpha\rangle. \qquad (۱۸۹.۳)$$

ماتریسِ مربعی‌یِ $H$ را به صورتِ زیر تعریف می‌کنیم

$$\langle e^\alpha|H|e_\beta\rangle := \omega_{\beta\to\alpha} \geq 0, \qquad \alpha\neq\beta \qquad (۱۹۰.۳)$$

$$\langle e^\alpha|H|e_\alpha\rangle := -\sum_{\beta\neq\alpha}\omega_{\alpha\to\beta} \leq 0 \qquad (۱۹۱.۳)$$

عنصرهایِ غیرِقطری‌یِ $\alpha$ برابر است با

$$\begin{aligned}\sum_\beta\langle e^\beta|H|e_\alpha\rangle =&\langle e^\alpha|H|e_\alpha\rangle + \sum_{\beta\neq\alpha}\langle e^\beta|H|e_\alpha\rangle\\ =& -\sum_{\beta\neq\alpha}\omega_{\alpha\to\beta} + \sum_{\beta\neq\alpha}\omega_{\alpha\to\beta} = 0\end{aligned} \qquad (۱۹۲.۳)$$

یا

$$\langle s|H\rangle_t = 0. \qquad (۱۹۳.۳)$$

با استفاده از تعریفِ $H$، و جدا کردنِ جملاتِ $\beta\neq\alpha$ و $\alpha=\beta$ می‌رسیم به

$$\begin{aligned}H|P\rangle_t =& \sum_{\alpha,\beta}|e_\alpha\rangle\langle e^\alpha|H|e_\beta\rangle\langle e^\beta|P\rangle_t\\ =& \sum_{\alpha=1}\sum_{\beta\neq\alpha}\omega_{\beta\to\alpha}P^\beta(t)|e_\alpha\rangle - \sum_{\alpha=1}\langle e^\alpha|H|e_\alpha\rangle P^\alpha(t)|e_\alpha\rangle\\ =& \sum_{\alpha=1}\sum_{\beta\neq\alpha}\Big(\omega_{\beta\to\alpha}P^\beta(t) - \omega_{\alpha\to\beta}P^\alpha(t)\Big)\,|e_\alpha\rangle,\end{aligned} \qquad (۱۹۴.۳)$$

حالا با استفاده از معادله‌ی ۱۸۹.۳ و ۱۹۴.۳ می‌رسیم به

$$\frac{\partial}{\partial t}|P\rangle_t = H|P\rangle_t \tag{۱۹۵.۳}$$

این معادله خیلی شبیهِ معادله‌ی شرودینگر است، و چون عمل‌گرِ $H$ عمل‌گرِ تحولِ زمانی است، معمولاً به آن همیلتونی‌ی تصادفی میگویند. البته این ماتریس لزوماً هرمیتی نیست. این ماتریس باید شرطهای ۱۹۰.۳ و ۱۹۱.۳ را برآورده کند، که به آن‌ها شرطهای تصادفی‌بودنِ یک ماتریس گفته می‌شود. گاهی به مسامحه به ویژه‌مقادیرِ آن انرژی هم گفته می‌شود که البته واقعاً انرژی‌ی یک برهم‌کنش نیستند. اما تعبیرِ این ویژه‌مقادیر و ویژه‌توابعِ متناظر با آن‌ها چیست؟ چون این ماتریس لزوماً هرمیتی نیست ممکن است ویژه‌بردارهای چپ و راستِ آن متفاوت باشند.

## ۴.۳ معادله‌های چپمن‌ـ کولموگوروف

فرض کنیم دستگاه نسبت به انتقال در زمان همگن باشد. در این صورت اگر احتمال رفتن از حالت $i$ به $j$ در زمان $t$ را با $P_{i\to j}(t)$ نمایش دهیم، $P_{i\to j}(t_1+t_2)$ را به دو صورت می‌توان نوشت

$$P_{i\to j}(t_1+t_2) = \sum_k P_{i\to k}(t_1)P_{k\to j}(t_2) \tag{۱۹۶.۳}$$

$$= \sum_k P_{i\to k}(t_2)P_{k\to j}(t_1). \tag{۱۹۷.۳}$$

حالا بیایید دو حالتِ زیر را در نظر بگیریم

- $t_1 = t, t_2 = \mathrm{d}t$ در این صورت می‌رسیم به

$$\begin{aligned}
P_{i\to j}(t+\mathrm{d}t) &= \sum_k P_{i\to k}(t)P_{k\to j}(\mathrm{d}t)\\
&= \sum_{k\neq j} P_{i\to k}(t)P_{k\to j}(\mathrm{d}t) + P_{i\to j}(t)P_{j\to j}(\mathrm{d}t)\\
&= \sum_{k\neq j} P_{i\to k}(t)\,\omega_{k\to j}\,\mathrm{d}t + P_{i\to j}(t)(1-\sum_{k\neq j}\omega_{j\to k}\,\mathrm{d}t)
\end{aligned}$$

که احتمالِ گذار $P_{k\to j}(\mathrm{d}t)$ برای زمانِ بسیار کوچکِ $\mathrm{d}t$ را می‌توانیم همان حاصلِ ضربِ نرخِ گذار $\omega_{k\to j}$ در $\mathrm{d}t$ بگیریم. علاوه بر این از این‌که جمع رویِ احتمالِ تمام حالت‌هایِ ممکن هم یک است، $\sum_k P_{j\to k}=1$، استفاده کرده‌ایم. نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\frac{P_{i\to j}(t+\mathrm{d}t)-P_{i\to j}(t)}{\mathrm{d}t} \approx &\frac{\mathrm{d}P_{i\to j}(t)}{\mathrm{d}t}\\ &=\sum_{k\neq j}\left[P_{i\to k}(t)\omega_{k\to j}-P_{i\to j}(t)\omega_{j\to k}\right]\end{aligned}$$

به این معادله معادله‌یِ کولموگروفِ رو به جلو[1] می‌گویند. ماتریس‌هایِ $\mathbf{P}_{ji}:=P_{i\to j}$ و $H$ را با عناصرِ زیر تعریف

$$\begin{aligned}H_{ji}&=\omega_{i\to j}\\ H_{jj}&=-\sum_{k\neq j}\omega_{j\to k}\end{aligned} \tag{۱۹۸.۳}$$

معادله‌یِ کولموگروفِ رو به جلو به معادله‌یِ زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t}=H\mathbf{P} \tag{۱۹۹.۳}$$

جوابِ این معادله

$$\mathbf{P}(t)=\exp\left(tH\right)\mathbf{P}(0) \tag{۲۰۰.۳}$$

است. با توجه به این که در زمانِ $t=0$ احتمالِ گذار از هر حالت به حالتِ دیگر صفر است، شرطِ مرزی $\mathbf{P}(0)$ ماتریسِ واحد است.

- $t_1=\mathrm{d}t, t_2=t$ در این صورت می‌رسیم به

$$\begin{aligned}P_{i\to j}(t+\mathrm{d}t)&=\sum_k P_{i\to k}(\mathrm{d}t)P_{k\to j}(t)\\ &=\sum_{k\neq i}P_{i\to k}(\mathrm{d}t)P_{k\to j}(t)+P_{i\to i}(\mathrm{d}t)P_{i\to j}(t)\end{aligned}$$

---

[1] Forward Kolmogorov

$$= \sum_{k\neq i} \omega_{i\to k}\, P_{k\to j}(t)\,\mathrm{d}t + P_{i\to j}(t)(1 - \sum_{k\neq i} \omega_{i\to k}\,\mathrm{d}t)$$

که می‌توان به شکلِ زیر نوشت

$$\begin{aligned}\frac{P_{i\to j}(t+\mathrm{d}t) - P_{i\to j}(t)}{\mathrm{d}t} \approx& \frac{\mathrm{d}P_{i\to j}(t)}{\mathrm{d}t}\\ =& \sum_{k\neq i} \omega_{i\to k}\,[P_{k\to j}(t) - P_{i\to j}(t)]\end{aligned}$$

به این معادله معادله‌یِ کولموگروفِ رو به عقب[۱] می‌گویند که همان معادله‌یِ زیر است

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{PH} \qquad (۲۰۱.۳)$$

جوابِ این معادله هم

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(0)\exp\left(t\mathbf{H}\right) = \exp\left(t\mathbf{H}\right) \qquad (۲۰۲.۳)$$

است که همان جوابی است که قبلا به دست آوردیم.

مثال ۱.۴.۳. حالا بیایید دوباره برگردیم به مثالِ ول‌گشت رویِ یک شبکه‌یِ یک‌بُعدی، اما حالا زمان را پارامتری پیوسته می‌گیریم. نرخِ گذار به راست را با $a$ و نرخِ گذار به چپ را با $b$ نشان می‌دهیم. در این‌جا بالاخره ول‌گرد در یکی از جای‌گاه‌ها است و تعدادِ حالاتِ ممکن شمارش‌پذیر است. احتمالِ آن‌که در زمانِ $t$ در جای‌گاهِ $n$ باشد را با $P_n(t)$ نشان می‌دهیم. معادله‌یِ مادر برایِ $P_n(t)$ عبارت است از

$$\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}t} = aP_{n-1} + bP_{n+1} - (a+b)P_n. \qquad (۲۰۳.۳)$$

این معادله را می‌توانیم مستقیماً از ۱۸۸.۳ به دست آوریم. حالتِ سیستم با جای‌گاهِ ذره در هر لحظه مشخص می‌شود. جمله‌یِ چشمه جمله‌ای است که حالتِ سیستم از جای‌گاه $n\pm 1$ به $n$ تبدیل شود و حالتِ چاه مربوط به وقتی است که از جای‌گاه $n$ به جای‌گاه‌های $n\pm 1$ برود.

[۱] Backward Kolmogorov

آموزنده است که معادله‌ی ۲۰۳.۳ را مستقیم هم به دست آوریم. احتمالِ آن‌که ول‌گرد در زمانِ $t+\delta t$ جای‌گاه $n$ باشد عبارت است از

$$P_n(t+\delta t) = a\delta t\, P_{n-1}(t) + b\delta t\, P_{n+1}(t) - [1-(a+b)\delta t]\, P_n(t), \quad (۲۰۴.۳)$$

$$\frac{P_n(t+\delta t) - P_n(t)}{\mathrm{d}t} = aP_{n-1}(t) + bP_{n+1}(t) - (a+b)P_n(t). \quad (۲۰۵.۳)$$

رابطه‌ی اخیر در حدِّ $\delta \to 0$ به ۲۰۳.۳ تبدیل می‌شود. ممکن است این سوال پیش آید که چرا جملاتی که ذره دو پله می‌پرد را در نظر نگرفتیم. مثلاً جمله‌ی چشمه‌ای هم داریم که ذره از جای‌گاهِ $n-2$ (یا حتی جای‌گاه‌های دورتر) به جای‌گاه $n$ بیاید. اما باید در نظر داشته باشیم که احتمالِ این پرش $(a\delta t)^2$ است که در حدِّ $\delta \to 0$ صفر می‌شود.

لازم است اطلاعی هم در موردِ حالتِ ابتدایی‌ی سیستم داشته باشیم. مثلاً شرطِ اولیه را

$$P_n(0) = \delta_{n,0} \quad (۲۰۶.۳)$$

بگیریم، یعنی فرض کنیم ذره ابتدا در مبدا است. با تعریفِ تابعِ مولدِ

$$F(Z,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z^n P_n(t) \quad (۲۰۷.۳)$$

معادله‌های ۲۰۳.۳ تبدیل می‌شود به

$$\frac{\mathrm{d}F(Z,t)}{\mathrm{d}t} = \left[aZ + bZ^{-1} - (a+b)\right] F(Z,t). \quad (۲۰۸.۳)$$

و شرطِ اولیه نیز می‌دهد

$$F(Z,0) = 1. \quad (۲۰۹.۳)$$

جوابِ معادله‌ی ۲۰۸.۳ همراه با شرطِ اولیه به سادگی به دست می‌آید

$$F(Z,t) = \exp\{[aZ + bZ^{-1} - (a+b)]t\}. \quad (۲۱۰.۳)$$

برای به دست آوردنِ احتمالِ حالت‌هایِ مختلف باید تابعِ مولد را بسط دهیم. با استفاده از ۲۰۷.۳ ضرایبِ بسط همان $P_n(t)$ ها هستند. اما گاهی مواردی وجود دارند که راهِ میان‌بر هم دارند. تابعِ مولدِ تابعِ بسلِ تعمیم‌یافته به صورتِ زیر است[۱]

$$\exp\{x[u+u^{-1}]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x)u^n. \qquad (۲۱۱.۳)$$

در این صورت

$$\begin{aligned} F(Z,t) =& \mathrm{e}^{-(a+b)t}\exp\{[aZ+bZ^{-1}]t\} \\ =& \mathrm{e}^{-(a+b)t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(t\sqrt{ab})\left(\sqrt{\frac{a}{b}}Z\right)^n \end{aligned} \qquad (۲۱۲.۳)$$

که با مقایسه با ۲۰۷.۳ نتیجه می‌دهد

$$P_n(t) =\mathrm{e}^{-(a+b)t}\left(\frac{a}{b}\right)^{n/2} I_n(t\sqrt{ab}). \qquad (۲۱۳.۳)$$

ما در این مثال تابعِ احتمالِ یافتنِ یک تک‌ذره که رویِ یک شبکه به راست یا چپ می‌رود را بررسی کردیم. مساله می‌تواند کمی پیچیده‌تر هم باشد. مثلاً اگر ذره بتواند قدم‌هایِ بلندتر هم بردارد جوابِ ما چه تغییری می‌کند؟ اگر به جایِ یک ذره تعدادی ذره رویِ شبکه بودند، نتیجه چه فرقی می‌کرد؟ در این موردِ اخیر ذرات ممکن است با هم کاری نداشته باشند و بتوانند از کنارِ هم رد شوند یا آنکه وقتی دو ذره به هم می‌رسند اتفاقی می‌اُفتد مثلاً ممکن است هر جای‌گاه تنها با یک ذره بتواند اشغال شود در این حالت می‌گوییم در فرآیند منع یا طرد [۲] وجود دارد. این مسائل نوعاً پیچیده‌تر هستند.

همین مسئله ول‌گردِ رویِ شبکه را می‌توانیم به حالتِ پیوستار[۳] هم تعمیم دهیم. برایِ این‌کار طولِ شبکه را کمیتی مثلِ $\Delta$ می‌گیریم و مسئله را در حدِّ $\Delta\to 0$ مطالعه می‌کنیم. بیایید حدِّ پیوستهِ‌ی معادله‌ی (۲۰۳.۳) را بررسی کنیم. در این صورت با تعریفِ $x := n\Delta$ و $p(t,x)\mathrm{d}x$ چگالیِ احتمالِ این است که در زمانِ $t$ ذره در فاصله‌یِ $x$ و $x+\mathrm{d}x$ باشد. بنا بر این

$$P_n(t) \to p(x,t)\,\mathrm{d}x$$

[۱] در کتابِ Mathematical Methods for Physicists, by: G. B. Arfken, H. J. Weber, F. E. Harris می‌توانید با تابعِ بسلِ تعمیم‌یافته و تابعِ مولد آن آشنا شوید.
[۲] exclusion
[۳] continuum

$$
\begin{aligned}
P_{n-1}(t) \rightarrow & p(x-\Delta,t)\,\mathrm{d}x\\
P_{n+1}(t) \rightarrow & p(x+\Delta,t)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}
\tag{۲۱۴.۳}
$$

و معادله‌یِ مادر (۲۰۳.۳) تبدیل می‌شود به

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} =& ap(x-\Delta,t)+bp(t,x+\Delta,t)-(a+b)p(x,t)\\
=& a[p(x,t)-\Delta\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}+\frac{\Delta^2}{2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}+\cdots]\\
& +b[p(x,t)+\Delta\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}+\frac{\Delta^2}{2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}+\cdots]\\
& -(a+b)P(x,t),\\
=& (a-b)\Delta\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}+(a+b)\frac{\Delta^2}{2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}+\cdots
\end{aligned}
\tag{۲۱۵.۳}
$$

که در حدّی که $\Delta\rightarrow 0$ و کمیت‌هایِ $u:=(a-b)\Delta$ و $D:=(a+b)\dfrac{\Delta^2}{2}$ محدود بمانند، می‌رسیم به

$$
\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}=u\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}+D\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}+\cdots
\tag{۲۱۶.۳}
$$

که $D$ ضریبِ پخش[۱] و $u$ ثابتِ سوق[۲] است. اگر تابعِ $p(x,t)$ یک تابعِ هموار با اُفت و خیزِ کم باشد جملاتی که حاویِ مشتقاتِ بالاتر از دویِ $p(x,t)$ است با توجه به ضرایبِ‌شان که توان‌هایِ بالاترِ $\Delta$ است، را می‌توانیم دور بریزیم. حتی اگر $p(x,t)$ تابعی پُر اُفت و خیز باشد و جملاتی که دور ریختیم در ابتدا بزرگ باشند می‌توانیم نشان دهیم حضورِ جمله‌یِ دوم باعث می‌شود با گذشتِ زمان تابع هموار شود و تقریبی که گفتیم تقریبِ قابلِ قبولی شود.

معادله‌یِ ۲۱۶.۳، معادله‌یِ پخش همراه با سوق است. معادله‌یِ پخش در سه بُعد عبارت است از

$$
\frac{\partial \rho}{\partial t}=D\nabla^2\rho.
\tag{۲۱۷.۳}
$$

که ضریبِ $D$ همان ضریبِ پخش است. برایِ حلِ این معادله یک شرطِ اولیه $\rho(\boldsymbol{r},0)$ به همراهِ شرط‌هایِ مرزی لازم است. در حالتِ پایا معادله‌یِ پخش به معادله‌یِ لاپلاس تبدیل می‌شود، که

---
[۱] diffusion [۲] drift

با شرط‌هایِ مرزیِ دیریکله یا نویمن علی‌الاصول قابلِ حل است. البته چون معادله‌ای پاره‌ای است، حلِ آن پیچیده‌تر از معادلاتِ دیفرانسیلِ عادی است.

برایِ فهمِ به‌ترِ معادله‌یِ پخش بیایید حالتِ یک‌بعدی را بررسی کنیم

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \tag{۲۱۸.۳}$$

در شکلِ (۸.۳) تحولِ زمانیِ یک تابع بر اثرِ معادله‌یِ پخش را می‌بینیم. در نقطه‌یِ $A$ تابعِ $\rho(x,0)$ بر حسبِ $x$ بیشینه و در نتیجه $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} < 0$ است. بنا بر این $\frac{\partial \rho}{\partial t} < 0$ و با گذشتِ زمان $\rho$ کوچک می‌شود. در نقاطِ $B$ و $C$ که تابعِ $\rho(x,0)$ بر حسبِ $x$ کمینه است، $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} > 0$ بنا بر این $\frac{\partial \rho}{\partial t} > 0$ و در نتیجه با گذشتِ زمان $\rho$ بزرگ می‌شود. به همین‌صورت با گذشتِ زمان تحولِ زمانی یِ معادله‌یِ پخش باعث می‌شود، نقاطِ بیشینه پایین‌تر بیایند و نقاطِ کمینه بالاتر بروند، که معنی‌اش این است که خمِ $\rho(x,t)$ هموار و هموارتر می‌شود. در حالت‌هایی که چگالی یک‌نواخت یا تابعی خطی بر حسبِ مکان است، یعنی جاهایی‌که $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0$ است، چگالی پایا می‌ماند و تحولِ زمانی ندارد.

معادله‌یِ انتقالِ حرارت هم شبیهِ معادله‌یِ پخش است

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{۲۱۹.۳}$$

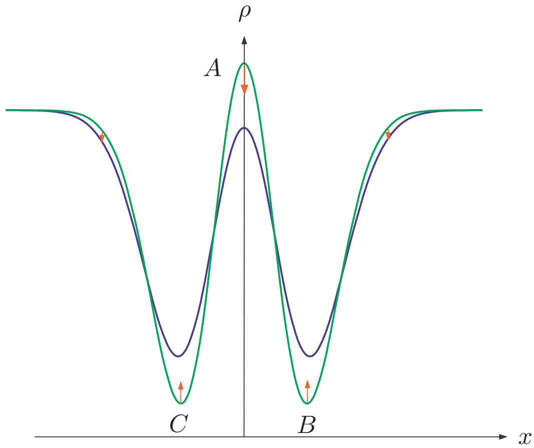
که $T$ دما و $\kappa$ ضریبِ انتقالِ حرارت است.

مثال ۲.۴.۳. فرض کنید در ابتدا یک تک‌ذره‌یِ $A$ وجود دارد. این ذره با نرخِ $a$ به دو ذره تبدیل می‌شود و با نرخِ $b$ نابود می‌شود. احتمالِ آن‌که در زمانِ $t$ ذره‌ای باقی نمانده باشد، چه‌قدر است؟ پس از زمانِ طولانی این احتمال چه‌قدر است؟

فرآیندها و نرخ‌ها عبارتند از

$$A \to AA, \quad a, \tag{۲۲۰.۳}$$

$$A \to \emptyset, \quad b. \tag{۲۲۱.۳}$$




شکل ۸.۳ خمِ سبزرنگ $\rho(x,0)$ و خمِ آبی‌رنگ تحول‌یافته‌یِ آن بر اثرِ معادله‌یِ پخش است. همان‌طور که می‌بینیم با گذشتِ زمان خم‌هموارتر می‌شود.

برایِ آن‌که معادله‌یِ تحولِ $P_n(t)$ یعنی معادله مادر را بنویسیم باید چشمه و چاه را به دست آوریم. وقتی سیستم شاملِ $(n-1)$ ذره است هر ذره با نرخِ $a$ می‌تواند یک ذره‌یِ جدید تولید کند. علاوه بر این وقتی سیستم شاملِ $(n+1)$ ذره است هر ذره با نرخِ $b$ ممکن است نابود شود و تعدادِ ذراتِ سیستم $n$ شود. جمله‌یِ چاه هم از این‌جا ناشی می‌شود که در یک سیستم $n$ ذره‌ای هر ذره با نرخ‌هایِ $a$ یا $b$ ممکن است به دو ذره تبدیل شود یا آن‌که نابود شود. پس معادله‌یِ مادر برایِ $P_n(t)$ عبارت است از

$$\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}t} = a(n-1)P_{n-1} + b(n+1)P_{n+1} - (a+b)nP_n, \quad n \geq 1 \qquad (۲۲۲.۳)$$

$$\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}t} = bP_1. \qquad (۲۲۳.۳)$$

شرطِ اولیه

$$P_n(0) = \delta_{n,1} \qquad (۲۲۴.۳)$$

است. در ادامه $P_n(t)$ را محاسبه خواهیم کرد ولی محاسبه‌یِ با استفاده از معادله‌یِ مادر، معادله‌یِ تحولِ زمانی‌یِ مقدارِ میانگینِ جمعیت، $\langle n\rangle$ ساده‌تر است. بیایید ابتدا آن را حساب کنیم. با استفاده از معادله‌یِ مادر ۲۲۲.۳ و ۲۲۳.۳ می‌توانیم معادله‌یِ تحولِ زمانی‌یِ مقدارِ میانگینِ جمعیت، $\langle n\rangle$ را به دست آوریم

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(t) =&a\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)P_{n-1}+b\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)P_{n+1}\\ &-\sum_{n=0}^{\infty}(a+b)n^2P_n.\end{aligned} \tag{۲۲۵.۳}$$

در سری‌هایِ اول و دوم در سمتِ راستِ معادله‌یِ بالا با تغییرِ متغیر به رابطه‌یِ زیر می‌رسیم

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle n\rangle =&a\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)nP_n+b\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)nP_n-\sum_{n=0}^{\infty}(a+b)n^2P_n\\ =&\sum_{n=0}^{\infty}[a(n+1)n+b(n-1)n-(a+b)n^2]P_n\\ =&(a-b)\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(t)\\ =&(a-b)\langle n\rangle,\end{aligned} \tag{۲۲۶.۳}$$

که جوابِ آن یک تابعِ نمایی است.

$$\langle n\rangle_t=\mathrm{e}^{(a-b)t}\langle n\rangle_0. \tag{۲۲۷.۳}$$

بسته به این‌که $a>b$ یا $a<b$ باشد، میانگینِ جمعیت پس از زمانِ طولانی به بی‌نهایت یا صفر میل می‌کند. با تعریفِ تابعِ مولد

$$F(Z,t)=\sum_{n=0} Z^nP_n(t) \tag{۲۲۸.۳}$$

معادله‌هایِ ۲۲۲.۳ و ۲۲۳.۳ تبدیل می‌شود به

$$\frac{\mathrm{d}F(Z,t)}{\mathrm{d}t}=\left[aZ^2+b-(a+b)Z\right]\frac{\mathrm{d}F(Z,t)}{\mathrm{d}Z}$$

$$=(Z-1)(aZ-b)\,\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}Z}=(a-b)\,\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}w} \qquad (۲۲۹.۳)$$

حالا با

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}Z}{(Z-1)(aZ-b)}&=\left[\frac{1}{Z-1}-\frac{a}{aZ-b}\right]\mathrm{d}Z\\ &=\frac{1}{a-b}\,\mathrm{d}\left\{\ln\left[\frac{Z-1}{aZ-b}\right]\right\}\end{aligned} \qquad (۲۳۰.۳)$$

و تعریفِ

$$w:=\ln\left[\frac{Z-1}{aZ-b}\right] \qquad (۲۳۱.۳)$$

$$\tau:=(a-b)t \qquad (۲۳۲.۳)$$

می‌رسیم به

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}w}. \qquad (۲۳۳.۳)$$

جوابِ این معادله

$$F(Z,t)=G(\tau+w).$$

$$=G\left((a-b)t+\ln[\frac{Z-1}{aZ-b}]\right) \qquad (۲۳۴.۳)$$

شرطِ اولیه معادل است با

$$F(Z,0)=Z \qquad (۲۳۵.۳)$$

که یعنی

$$G\left(\ln[\frac{Z-1}{aZ-b}]\right)=Z \qquad (۲۳۶.۳)$$

$$G(w)=Z \qquad (۲۳۷.۳)$$

با استفاده از رابطه‌یِ بینِ $Z$ و $w$ داریم

$$Z = \left[\frac{1-be^{w}}{1-ae^{w}}\right] \tag{۲۳۸.۳}$$

پس

$$G(w) = \left[\frac{1-be^{w}}{1-ae^{w}}\right] \tag{۲۳۹.۳}$$

بنا بر این

$$\begin{aligned} F(Z,t) =& G\left((a-b)t + \ln[\frac{Z-1}{aZ-b}]\right) \\ =& \left[\frac{1-b\,[\dfrac{Z-1}{aZ-b}]e^{(a-b)t}}{1-a\,[\dfrac{Z-1}{aZ-b}]e^{(a-b)t}}\right] \\ =& \left[\frac{(aZ-b)-b\,(Z-1)e^{(a-b)t}}{(aZ-b)-a\,(Z-1)e^{(a-b)t}}\right] \end{aligned} \tag{۲۴۰.۳}$$

پس از زمانِ طولانی

$$\lim_{t\to\infty} F(Z,t) = \begin{cases} 1, & a \le b, \\ \dfrac{b}{a}, & a > b. \end{cases} \tag{۲۴۱.۳}$$

چون مقادیرِ بالا مستقل از $Z$ هستند یعنی در بسطِ تیلور $F$ همان مقدارِ احتمالِ انقراض یعنی $P_0$ هستند. پس

$$\lim_{t\to\infty} P_0(t) = \begin{cases} 1, & a \le b, \\ \dfrac{b}{a}, & a > b, \end{cases} \tag{۲۴۲.۳}$$

و در زمانِ دل‌خواه

$$P_0(t) = F(Z,t)|_{Z=0} = \left[\frac{b\,(1-e^{(a-b)t)})}{(b-ae^{(a-b)t})}\right], \tag{۲۴۳.۳}$$

و

$$P_n(t) = e^{(a-b)t}\,(1-\frac{b}{a})^2\left[\frac{(e^{(a-b)t}-1)^{n-1}}{(e^{(a-b)t}-\frac{b}{a})^{n+1}}\right],\quad n\geq 1 \tag{۲۴۴.۳}$$

است. هر چند اگر نرخِ مرگ کم‌تر از نرخِ تولد باشد جمعیت متوسط به طورِ نمایی افزایش یابد ولی اُفت‌و خیزها آن‌قدر بزرگ هستند که احتمالِ انقراض غیرِ صفر است.

مثال ۳.۴.۳. بیایید همان مسئله‌یِ قبل را با معادله‌یِ کولموگروفِ رو به عقب حل کنیم.

$$\frac{\mathrm{d}P(n,1,t)}{\mathrm{d}t} = aP(n,2,t)-(a+b)P(n,1,t), \tag{۲۴۵.۳}$$

$$\frac{\mathrm{d}P(0,1,t)}{\mathrm{d}t} = b\,\delta_{n,0}, \tag{۲۴۶.۳}$$

که $P(n,n_0,t)$ احتمالِ آن است که در زمانِ $t$، $n$ ذره داشته باشیم با این شرط که با $n_0$ ذره شروع کرده باشیم. با تعریفِ تابعِ مولدِ

$$\tilde{G}(Z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} Z^n P(n,1,t) \tag{۲۴۷.۳}$$

معادله‌هایِ ۳.۴.۳ تبدیل می‌شود به

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{G}(Z,t)}{\mathrm{d}t} = a\tilde{G}^2(Z,t)+b-(a+b)\tilde{G}(Z,t). \tag{۲۴۸.۳}$$

در این‌جا از

$$P(n,2,t) = \sum_{k=0}^{n} P(k,1,t)P(n-k,1,t), \tag{۲۴۹.۳}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} Z^n P(n,2,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} Z^k Z^{n-k} P(k,1,t)P(n-k,1,t)\\ &= \tilde{G}^2(Z,t),\end{aligned} \tag{۲۵۰.۳}$$

و این‌که

$$P(k,1,t) = 0,\qquad k<0 \tag{۲۵۱.۳}$$

استفاده کرده‌ایم. با حلِّ معادله‌یِ ۲۴۸.۳ تابعِ مولد به دست می‌آید که همان ۲۴۰.۳ است.

### ۱.۴.۳ متوسطِ یک کمیت

احتمالِ آن‌که سیستمی در زمانِ $t$ در حالتِ $\alpha$ باشد را با $P^\alpha(t)$ نشان می‌دهیم. مقدارِ $A$ در این آرایش را با $A_\alpha$ نمایش می‌دهیم. در این صورت متوسطِ $A$ عبارت است از

$$\begin{aligned}\langle A\rangle_t =& \sum_\alpha A_\alpha P^\alpha(t)\\ =& \sum_\alpha A_\alpha \langle e^\alpha|P\rangle_t.\end{aligned} \tag{۲۵۲.۳}$$

این رابطه پیش‌نهاد می‌کند عمل‌گری مثلِ $\boldsymbol{A}$ تعریف کنیم که $\langle e^\alpha|$ ویژه‌بردارهایِ آن با ویژه‌مقدارهایِ $A_\alpha$ باشد.

$$\langle e^\alpha|\boldsymbol{A} = A_\alpha\langle e^\alpha|. \tag{۲۵۳.۳}$$

در این‌صورت ۲۵۲.۳ تبدیل می‌شود به

$$\begin{aligned}\langle A\rangle_t =& \sum_\alpha \langle e^\alpha|\boldsymbol{A}|P\rangle_t\\ =& \langle s|\boldsymbol{A}|P\rangle_t.\end{aligned} \tag{۲۵۴.۳}$$

در رابطه‌یِ آخر از (۱۲۵.۳) استفاده کرده‌ایم. اگر رابطه‌ای که برایِ مقدارِ میان‌گین به دست آوردیم با آن‌چه در مکانیکِ کوانتمی داریم مقایسه کنیم شباهت‌هایی می‌بینیم. مثلاً در هر دو مورد به هر کمیت یک عمل‌گر نسبت می‌دهیم که مقادیری که برایِ آن کمیت در مشاهده به دست می‌آید ویژه‌مقادیرِ آن عمل‌گر است یا برایِ محاسبه‌یِ مقدارِ میان‌گین باید آن عمل‌گر را بین دو برا و کِت قرار دهیم. اما تفاوت در آن‌جاست که در مکانیکِ کوانتمی برا و کت به بردارِ حالت مربوطند. اما در این‌جا برا $\langle s|$ و کِت بردارِ احتمال $|P\rangle_t$ است.

مثال ۴.۴.۳ . سیستمی با یک جای‌گاه در نظر بگیرید که این جای‌گاه ممکن است پُر (○) یا خالی (●) باشد. این سیستم دو حالت می‌تواند داشته باشد. وقتی خالی است $n_1 = 0$ و وقتی پُر است $n_2 = 1$ است. فضایِ برداری دوبُعدی و پایه‌ها عبارت هستند از

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad |e_2\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{۲۵۵.۳}$$

بِراها هم عبارت هستند از

$$\langle e^1| = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}, \quad \langle e^2| = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}. \tag{۲۵۶.۳}$$

به تعدادِ ذره در جای‌گاه عمل‌گرِ $\boldsymbol{n}$ می‌توانیم نسبت دهیم که ویژه‌مقادیرِ آن $0$ و $1$ و و ویژه‌بردارهای آن $\langle e^1|$ و $\langle e^2|$ هستند. در این‌صورت عمل‌گرِ $\boldsymbol{n}$ عبارت است از

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{۲۵۷.۳}$$

## ۵.۳ توابعِ هم‌بستگی

اما حالا بیایید ببینیم معنایِ این توابعِ هم‌بستگی چیست؟ از $\langle n_i\rangle$ شروع کنیم. این کمیت متوسطِ تعدادِ ذره در جای‌گاهِ $i$ است. آیا این کمیت را (مثلاً برایِ سیستمِ دوحالته) می‌توان برحسبِ احتمال اشغال‌بودنِ جای‌گاهِ $i$، $P_i^\bullet$ و یا احتمالِ خالی بودنِ جای‌گاهِ $j$، که با $P_i^\circ$ نشانش می‌دهیم هم می‌توان نوشت؟

$$\begin{aligned}\langle n_i\rangle &= P_i^\circ \times (0) + P_i^\bullet \times (+1)\\ &= P_i^\bullet.\end{aligned} \tag{۲۵۸.۳}$$

اما از طرفِ دیگر

$$P_i^\circ + P_i^\bullet = 1. \tag{۲۵۹.۳}$$

پس

$$\begin{aligned}P_i^\bullet &= \langle n_i\rangle\\ P_i^\circ &= 1 - P_i^\bullet = \langle(1-n_i)\rangle\rangle).\end{aligned} \tag{۲۶۰.۳}$$

تابعِ دونقطه‌ایِ $\langle n_i n_j\rangle$ متوسطِ حاصل‌ضربِ عددِ اشغالِ دو جای‌گاهِ $i$ و $j$ است که می‌توان آن را برحسبِ احتمالِ این‌که آن جای‌گاه‌ها اشغال باشند هم نوشت،

$$\langle n_i n_j\rangle = P_{i,j}^{\circ\circ} \times 0 \times 0 + (P_{i,j}^{\circ\bullet} \times 0 \times 1 + P_{i,j}^{\bullet\circ}) \times 1 \times 0 + P_{i,j}^{\bullet\bullet} \times 1 \times 1,$$

$$=P_{i,j}^{\bullet\bullet} \tag{۲۶۱.۳}$$

که مثلاً $P_{i,j}^{\bullet\circ}$ احتمالِ آن است که جای‌گاهِ $i$ اشغال و جای‌گاهِ $j$ خالی باشد.
اما اگر عمل‌گرِ

$$\boldsymbol{S} := 2\boldsymbol{n} - 1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{۲۶۲.۳}$$

را در نظر بگیریم وضعیت کمی فرق می‌کند. ویژه‌مقادیرِ عمل‌گرِ $\boldsymbol{S}$، $\pm 1$ و ویژه‌مقادیرِ عمل‌گرِ $\boldsymbol{n}$، $1$ و $0$ هستند. اگر $S_i = +1(-1)$ باشد $n_i = 1(0)$ است. در این صورت توابعِ چند نقطه‌ایِ عمل‌گرِ $\boldsymbol{S}$ رابطه‌ی دیگری با احتمال دارند

$$\begin{aligned} \langle S_i \rangle &= P_i^+ \times (1) + P_i^- \times (-1) \\ &= P_i^+ - P_i^-, \end{aligned} \tag{۲۶۳.۳}$$

و

$$\langle S_i S_j \rangle = P_{i,j}^{++} - (P_{i,j}^{+-} + P_{i,j}^{-+}) + P_{i,j}^{--}, \tag{۲۶۴.۳}$$

## ۶.۳ فرآیندهای کنش-پخش

یکی از مثال‌هایی که قبلاً بررسی کردیم مسئله‌یِ ول‌گشت بود. در مسئله‌یِ ول‌گشت رویِ یک شبکه ذره‌ای رویِ شبکه رها شده و با احتمال‌هایِ مختلف (یا با نرخ‌هایِ مختلف) در جهت‌هایِ مختلف رویِ شبکه حرکت می‌کند. حالا اگر به جایِ یک ذره بیش از یک ذره داشته باشیم مسئله پیچیده‌تر می‌شود. مثلاً باید فرض‌هایی در موردِ برهم‌کنشِ این ذرات با هم داشته باشیم. آیا هر جای‌گاه می‌تواند با بیش از یک ذره اشغال شود؟ یا آن‌که هر جای‌گاه یا پُر است یا خالی؟ در مورد اخیر می‌گوییم طرد[۱] داریم. آیا وقتی دو ذره به نزدیکی‌یِ هم رسیدند (مثلاً دو جای‌گاهِ مجاور) چه برهم‌کنش‌هایی می‌توانند داشته باشند؟ در این حالت اگر برهم‌کنشی بود به آن برهم‌کنشِ نزدیک‌ترین همسایه[۲] می‌گوییم. ممکن است برهم‌کنش از نوعِ دوربُردتر مثلاً هم‌سایه‌یِ بعدی[۳]

---

[۱] exclusion [۲] nearest-neighbor interaction [۳] next-nearest-neighbor interaction

باشد. ممکن است تنها یک گونه ذره داشته باشیم. مدل‌هایی وجود دارند که شاملِ چندگونه‌ذره[۱] هستند. این نوع مسائل در چارچوبِ فرآیندهایِ کنش_پخش[۲] مطالعه می‌شوند. اگر این ذرات با هم برهم‌کنش نداشته باشند و مستقل از هم رویِ شبکه باشند، مسئله تبدیل به تعدادیِ مسئله‌یِ تک‌ذره می‌شود. برهم‌کنشِ ذرات می‌تواند شاملِ تولد، مرگ، خلق، فنا، پخش و امثالِ این‌ها شود.

مثال ۱.۶.۳. اگر در مثالِ ۴.۴.۳ به جایِ تک‌جای‌گاه، سیستمی با $L$ جای‌گاه داشته باشیم که هر جای‌گاه ممکن است پُر یا خالی باشد. در این صورت هر جای‌گاه دو حالت ممکن است اختیار کند و تعدادِ حالت‌هایِ ممکن $2^L$ تاست. پس کلاً $2^L$ حالتِ متمایز داریم. هر حالت را با یک بردارِ ستونی که یک عضوِ آن $1$ و بقیه $0$ هستند نمایش می‌دهیم. بُعدِ این بردارِ ستونی $2^L$ است. این حالت‌ها را به زبان ضربِ تانسوری هم می‌توانیم بنویسیم. اگر حالتِ خالیِ (پُر) یک جای‌گاه را با $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ($\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$) حالتی که همه‌یِ جای‌گاه‌ها خالی هستند را می‌توانیم با

$$|e_1\rangle = \overbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \cdots \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}^{2^L}. \tag{۲۶۵.۳}$$

نشان دهیم. در این حالت عمل‌گرِ شمارنده‌یِ ذره‌یِ تک‌جای‌گاهی

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \tag{۲۶۶.۳}$$

و عمل‌گرِ شمارنده‌یِ ذره‌یِ در جای‌گاهِ $i$ عبارت است از

$$\boldsymbol{n}_i = \overbrace{\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \cdots \otimes \mathbb{1}}^{i-1} \otimes \boldsymbol{n} \otimes \overbrace{\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \cdots \otimes \mathbb{1}}^{2^L - i}. \tag{۲۶۷.۳}$$

که $\mathbb{1}$ عمل‌گرِ واحد است. $\mathbb{1}$ در این مثال ماتریسِ واحدِ $2 \times 2$ است. عمل‌گرِ $\boldsymbol{n}_i$ رویِ همه‌یِ جای‌گاه‌ها مثلِ عمل‌گرِ واحد است جز جای‌گاهِ $i$ که رویِ آن عمل‌گرِ شمارنده‌یِ ذره $\boldsymbol{n}$ است. با استفاده از این خاصیتِ ضربِ تانسوری

$$(\boldsymbol{A} \otimes \mathbb{1})(\mathbb{1} \otimes \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} \tag{۲۶۸.۳}$$

[۱] multi-species
[۲] reaction–diffusion

حاصل‌ضربِ عمل‌گرهایِ شمارنده‌یِ ذره در جای‌گاه‌هایِ $i$ و $j$ عبارت است از

$$\boldsymbol{n}_i\boldsymbol{n}_j = \overbrace{\mathbb{1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{1}}^{i-1}\otimes\boldsymbol{n}\otimes\overbrace{\mathbb{1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{1}}^{j-i-1}\otimes\boldsymbol{n}\otimes\overbrace{\mathbb{1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{1}}^{2^L-j}. \qquad (۲۶۹.۳)$$

در این مثال تعدادِ حالت‌ها $2^L$ است. اگر فرض کنیم در هر واکنش از هر حالت به هر حالتِ دیگر می‌توان رفت، تعدادِ واکنش‌هایِ ممکن انتخابِ 2 از $2^L$ یعنی

$$\binom{2^L}{2} = \frac{(2^L)!}{2!(2^L-2)!} \qquad (۲۷۰.۳)$$

است. در این‌صورت برهم‌کنش‌ها بین هر دو حالتی مجاز هستند. اگر خودمان را محدود به برهم‌کنش‌هایِ موضعی مثلاً فقط بینِ نزدیک‌ترین همسایه‌ها بکنیم، برهم‌کنش‌هایِ مجاز خیلی محدودتر می‌شوند. برایِ سیستمی با $L$ جای‌گاه، همیلتونیِ کل را جمعِ همیلتونی‌هایِ دوجای‌گاهی می‌نویسیم

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{L-1} H_{i,i+1}, \qquad (۲۷۱.۳)$$

که

$$H_{i,i+1} := \underbrace{\mathbb{1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{1}}_{i-1}\otimes H\otimes\underbrace{\mathbb{1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{1}}_{L-i-1}. \qquad (۲۷۲.۳)$$

در این‌جا $\mathbb{1}$ ماتریسِ واحد است. اگر سیستم مرز داشته باشد مرز مثلِ منبع برای سیستم رفتار می‌کند و همیلتونی به شکلِ زیر در می‌آید

$$\mathcal{H} = h_1 + \sum_{i=1}^{L-1} H_{i,i+1} + h_L. \qquad (۲۷۳.۳)$$

دو همیلتونیِ $h_1$ و $h_L$ فقط رویِ جای‌گاهِ اول و آخرِ شبکه اثر می‌کنند.

بُعدِ ماتریسِ واحد در ۲۷۲.۳ به اندازه‌یِ تعدادِ حالت‌هایِ هر جای‌گاه است. برایِ تک‌گونه ذره و در نظر گرفتنِ طرد هر جای‌گاه دو حالت دارد: پُر یا خالی. در این حالت $\mathbb{1}$، $h_1$ و $h_L$

ماتریسِ $2 \times 2$ و $H$ ماتریسِ $4 \times 4$ است. با توجه به اصلِ طرد، هر جای‌گاه یا پُر است یا خالی، و دو جای‌گاه چهار آرایش دارند، که آن‌ها را به صورتِ زیر از حالتِ 1 تا 4 نام‌گذاری می‌کنیم

$$\circ\circ \qquad 1 \qquad (۲۷۴.۳)$$

$$\circ\bullet \qquad 2 \qquad (۲۷۵.۳)$$

$$\bullet\circ \qquad 3 \qquad (۲۷۶.۳)$$

$$\bullet\bullet \qquad 4 \qquad (۲۷۷.۳)$$

کلی‌ترین برهم‌کنش‌هایِ ممکنِ دوجایگاهی رویِ شبکه به صورتِ زیر است.

$$\bullet\circ \rightarrow \begin{cases} \bullet\bullet, & \text{تولد} \\ \circ\bullet, & \text{پخشِ به راست} \\ \circ\circ, & \text{مرگ} \end{cases} \qquad (۲۷۸.۳)$$

$$\circ\bullet \rightarrow \begin{cases} \bullet\circ, & \text{پخشِ به چپ} \\ \bullet\bullet, & \text{تولد} \\ \circ\circ, & \text{مرگ} \end{cases} \qquad (۲۷۹.۳)$$

$$\bullet\bullet \rightarrow \begin{cases} \bullet\circ, & \text{مرگ} \\ \circ\circ, & \text{فنا} \\ \circ\bullet, & \text{مرگ} \end{cases} \qquad (۲۸۰.۳)$$

$$\circ\circ \rightarrow \begin{cases} \bullet\circ, & \text{تولد} \\ \bullet\bullet, & \text{خلق} \\ \circ\bullet & \text{تولد} \end{cases} \qquad (۲۸۱.۳)$$

که $\bullet(\circ)$ جای‌گاهی پُر (خالی) را نشان می‌دهد. همیلتونیِ مرزی می‌تواند معرفِ نرخِ ورود و خروجِ ذره از مرزها باشد. برایِ این گذارها اسم‌گذاری‌هایِ مختلفی شده است.
گاهی به $\bullet\circ \rightarrow \bullet\bullet$ ادغام یا انعقاد[1] در چپ هم گفته می‌شود. برایِ چنین سیستمی

[1] coagulation

همیلتونی‌یِ دوجای‌گاهی عبارت است از

$$H = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} & \omega_{14} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} & \omega_{24} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} & \omega_{34} \\ \omega_{41} & \omega_{42} & \omega_{43} & \omega_{44} \end{pmatrix} \tag{۲۸۲.۳}$$

که برایِ عناصرِ غیرِقطری $\omega_{ij}$ نرخِ گذار از حالتِ $j$ به $i$ است و عناصرِ قطری $\omega_{ii} = -\sum_{j\neq i}\omega_{ji}$ هستند.

مثال ۲.۶.۳. بیایید فرض کنیم تنها برهم‌کنش‌هایِ ممکن پخش هستند. در این‌صورت

$$\bullet\circ \to \circ\bullet, \qquad \alpha \tag{۲۸۳.۳}$$

$$\circ\bullet \to \bullet\circ, \qquad \beta \tag{۲۸۴.۳}$$

که $\omega_{23} = \alpha$ و $\omega_{32} = \beta$ نرخ‌هایِ پخش به راست و چپ هستند. حالتِ $\alpha \neq \beta$ مربوط به پخشِ نامتقارن است. همیلتونی‌یِ دوجای‌گاهی برایِ این سیستم عبارت است از

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{۲۸۵.۳}$$

ممکن است مسئله شرطِ مرزی‌یِ دوره‌ای داشته باشد. مثلاً در یک بُعد شبکه یک حلقه باشد. ممکن هم هست سیستم موردِ مطالعه‌یِ ما مرز داشته باشد. اگر جمله‌هایِ مرزی هم داشته باشیم

$$h_1 = \begin{pmatrix} -a & a' \\ a & -a' \end{pmatrix}, \qquad h_L = \begin{pmatrix} -b & b' \\ b & -b' \end{pmatrix}, \tag{۲۸۶.۳}$$

که $a, a'$ به‌ترتیب نرخِ ورود و خروجِ ذره از مرزِ چپ و $b, b'$ نرخِ ورود و خروجِ ذره از مرزِ راست است.

احتمالِ آرایشهایِ ممکن در زمانِ $t$ را با $P(n_1, n_2, \cdots, n_L, t)$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید شرطِ مرزی دوره‌ای است. در هر لحظه یکی از $n_i$ ها می‌تواند تغییر کند. معادله‌یِ مادر

عبارت است از

$$\frac{\partial P(n_1,n_2,\cdots,n_L,t)}{\partial t} = \alpha\sum_{n_i} P(n_1,\cdots,n_{i-1}-1,n_i+1,\cdots,n_L,t) + \beta\sum_{n_i} P(n_1,\cdots,n_i+1,n_{i+1}-1,\cdots,n_L,t) - (\alpha+\beta)\sum_{n_i} P(n_1,\cdots,n_L,t). \qquad (۲۸۷.۳)$$

ما راهِ حلِّ ساده‌ای برایِ حلّ این معادله بلد نیستیم. اما اگر جوابِ پایایی برایِ آن بخواهیم، حداقل یک حدسِ ساده وجود دارد. این‌که احتمالِ همه‌یِ آرایش‌ها برابر باشد، یعنی

$$P(n_1,n_2,\cdots,n_L,t\to\infty)$$

برایِ همه‌یِ آرایش‌ها یکی باشد. از آن‌جا که پخشِ تعدادِ ذرات را عوض نمی‌کند، تعدادِ ذراتِ رویِ شبکه یعنی

$$\sum_{i=1}^{L} n_i(t) = \sum_{i=1}^{L} n_i(0) = N_0 \qquad (۲۸۸.۳)$$

است. در این‌صورت چگالی‌یِ ذرات پس از زمانِ طولانی همان مقدارِ اولیه‌یِ چگالی‌یِ میانگینِ ذرات است. یعنی

$$\langle n_i(t)\rangle_{t\to\infty} = \frac{N_0}{L}. \qquad (۲۸۹.۳)$$

ما این جواب را حدس زدیم. اما هنوز می‌توان این سوال را پرسید که آیا حالتِ نهایی ممکن است چیزِ دیگری باشد؟ در این مثال هر آرایشی با $N_0$ ذره‌یِ اولیه قابلِ تبدیل به حالتِ دیگری با همین تعداد ذره است. قضیه‌ای وجود دارد که هر گاه در سیستمی همه‌یِ آرایش‌هایِ ممکن قابلِ تبدیل به هم باشند، حالتِ نهایی یک‌تاست. البته توجه داریم که ما خود را به زیرفضایِ $N_0$ ذره‌یِ اولیه محدود کرده‌ایم و جوابِ نهایی‌یِ ما در این زیرفضا است. اگر مستقل از شرایطِ اولیه هر حالتی را به هر حالتی بتوان تبدیل کرد جوابِ نهایی یک‌تا و مستقل از شرایطِ اولیه است. مثلاً فرض کنید واکنش‌هایِ ممکن

$$\bullet\circ \to \circ\bullet, \qquad \alpha, \qquad (۲۹۰.۳)$$

$$\circ\bullet \to \bullet\circ, \qquad \beta, \tag{۲۹۱.۳}$$

$$\circ\circ \to \bullet\bullet, \qquad \gamma, \tag{۲۹۲.۳}$$

$$\circ\bullet \to \circ\circ, \qquad \lambda \neq 0 \tag{۲۹۳.۳}$$

باشند. جوابی بدیهی برایِ حالتِ نهایی این است که شبکه خالی از ذره باشد. اگر هم $\lambda = 0$ باشد، اگر $N_0$ زوج باشد، پس از گذشتِ زمانی طولانی شبکه خالی از ذره است. اما اگر $N_0$ فرد باشد، پس از گذشتِ زمانی طولانی یک ذره باقی می‌ماند. در این حالت چگالیِ نهایی $\frac{1}{L}$ است.

### ۱.۶.۳ معادله تحولِ توابعِ هم‌بستگی

برایِ محاسبه‌یِ تابع‌هایِ هم‌بستگی می‌توانیم از معادله‌یِ مادر شروع کنیم یا می‌توانیم مستقیما هم این رابطه را با نوشتنِ جمله‌هایِ چشمه و چاه برایِ $\langle n_k \rangle$ به دست آوریم. جمله‌هایِ چشمه آن‌هایی هستند که باعث می‌شوند جای‌گاهِ $k$ پُر شود. مثلاً یکی از جمله‌هایِ چشمه این است که جای‌گاهِ $k-1$ پُر و $k$ خالی باشد و با نرخِ $\alpha$ جای‌گاهِ $k$ پُر شود. جمله‌هایِ چشمه عبارت است از

$$\alpha P^{\bullet\circ}_{k-1,k} = \alpha\langle n_{k-1}(1-n_k)\rangle \tag{۲۹۴.۳}$$

$$\beta P^{\circ\bullet}_{k,k+1} = \beta\langle (1-n_k)n_{k+1}\rangle, \tag{۲۹۵.۳}$$

و جمله‌هایِ چاه عبارت هستند از

$$\alpha P^{\bullet\circ}_{k,k+1} = \alpha\langle n_k(1-n_{k+1})\rangle \tag{۲۹۶.۳}$$

$$\beta P^{\circ\bullet}_{k-1,k} = \beta\langle (1-n_{k-1})n_k\rangle, \tag{۲۹۷.۳}$$

در این صورت می‌رسیم به

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle n_k\rangle = \alpha\langle n_{k-1}(1-n_k)\rangle + \beta\langle(1-n_k)n_{k+1}\rangle - \alpha\langle n_k(1-n_{k+1})\rangle - \beta\langle(1-n_{k-1})n_k\rangle, \tag{۲۹۸.۳}$$

یا

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle n_k\rangle = \alpha\langle n_{k-1}\rangle + \beta\langle n_{k+1}\rangle - (\alpha+\beta)\langle n_k\rangle - (\alpha-\beta)\left[\langle n_{k-1}n_k\rangle - \langle n_k n_{k+1}\rangle\right]. \qquad (۲۹۹.۳)$$

حلِ این معادله هم به روشِ معمول جز در حالت‌هایِ خاص نشدنی است. مشکل این‌جاست که در معادله‌یِ تحولِ تابعِ تک‌نقطه‌ای تابع‌هایِ دونقطه‌ای ظاهر شده‌اند. اگر معادله‌یِ تحولِ تابع‌هایِ دونقطه‌ای را بنویسیم در نتیجه‌مان هم تابع‌هایِ تک‌نقطه‌ای، هم دونقطه‌ای و هم سه‌نقطه‌ای ظاهر می‌شوند. در حالتِ کلی در معادله‌یِ تحولِ هر تابعِ $n$ نقطه‌ای تابع‌هایِ $n+1$ نقطه‌ای هم ظاهر می‌شوند. به این ترتیب به این شکل نمی‌توانیم این مسئله را حل کنیم. اما اگر حالت‌هایِ خاصی مثلاً پخشِ متقارن را نگاه کنیم، مسئله ساده می‌شود. برایِ پخشِ متقارن $\alpha = \beta$ است. در این‌صورت جملاتِ مربوطِ به تابع‌هایِ دونقطه‌ای حذف می‌شوند

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle n_k\rangle = \alpha\left[\langle n_{k-1}\rangle + \langle n_{k+1}\rangle - 2\langle n_k\rangle\right]. \qquad (۳۰۰.۳)$$

پس از زمانِ طولانی که سیستم به حالتِ پایا می‌رسد

$$\langle n_{k-1}\rangle_\infty + \langle n_{k+1}\rangle_\infty - 2\langle n_k\rangle_\infty = 0. \qquad (۳۰۱.۳)$$

جوابِ این معادله

$$\langle n_k\rangle_\infty = C_1 + C_2 k, \qquad (۳۰۲.۳)$$

است. اما در حالتی که شرطِ مرزی دوره‌ای است یا آن‌که شبکه‌ای بی‌نهایت طویل داریم، $C_2 = 0$ است. در این‌صورت پس از زمانِ طولانی که سیستم به حالتِ پایا می‌رسد، میانگینِ عددِ اشغالِ هر جای‌گاه یک‌نواخت می‌شود. این جواب البته همانی است که انتظارش را داشتیم. معادله‌یِ (۳۰۰.۳) شبیهِ (۲۰۳.۳) است. از جوابی که برایِ آن به دست آوردیم می‌توانیم استفاده کنیم. البته باید توجه داشته باشیم که شرطِ اولیه در این‌جا چیزی مثلِ $\langle n_i\rangle_0$ است. پس

$$F(Z,0) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \langle n_j\rangle_0 Z^j. \qquad (۳۰۳.۳)$$

اگر مشابهِ همان محاسبه را برایِ یک شبکه‌یِ بی‌نهایت طویل تکرار کنیم می‌رسیم به

$$\begin{aligned} F(Z,t) =& \mathrm{e}^{-2\alpha t} \sum_{i=-\infty}^{\infty} I_i(\alpha t) Z^i F(Z,0) \\ =& \mathrm{e}^{-2\alpha t} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_i(\alpha t) \langle n_j \rangle_0 Z^{i+j}. \end{aligned} \tag{۳۰۴.۳}$$

پس

$$\langle n_k \rangle_t = \mathrm{e}^{-2\alpha t} \sum_j I_{k-j}(\alpha t) \langle n_j \rangle_0. \tag{۳۰۵.۳}$$

اگر رفتارِ حدّی‌یِ توابعِ بسلِ تعمیم‌یافته راجای‌گزین کنیم

$$I_k(x) \approx \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2\pi x}} + \cdots , \qquad x \gg 1. \tag{۳۰۶.۳}$$

رفتارِ زمان‌بلندِ $\langle n_k \rangle_t$ به دست می‌آید

$$\langle n_k \rangle_t \sim \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}}{\sqrt{2\pi \alpha t}}. \tag{۳۰۷.۳}$$

## مسائل

۱.۳ الف ــ در پدیده‌یِ ول‌گشت ول‌گردی کُلاً 10 قدم برداشته است که از این 10 قدم 6 قدمِ آن به راست و 4 قدمِ آن به چپ بوده است. به چند طریقِ ممکن این رویداد می‌تواند اتفاق اُفتاده باشد؟

ب ــ به چند طریقِ ممکن می‌توان 10 گلوله‌یِ مشابه را در سه جعبه قرار داد؟ (جعبه‌ها تمیزپذیراَند، ولی گلوله‌ها تمیزناپذیراَند).

ج ــ انرژی‌یِ هر نوسان‌گرِ هماهنگ با $\epsilon_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ داده می‌شود. می‌خواهیم انرژی‌یِ $E$ را بینِ $N$ نوسان‌گر تقسیم کنیم. چند راه برایِ این کار وجود دارد؟

د ــ در حالتِ قبل اگر $E/N\hbar\omega \gg 1$ باشد، تقریباً چند راه برایِ این کار وجود دارد؟

۲.۳ الف ــ فرض کنید در مساله ولگشتِ متقارنِ ساده ذره در ابتدا در مکانِ $s_0$ بوده یعنی شرطِ اولیه

$$P_{t,s}\big|_{t=0} = \delta_{s,s_0}$$

است. احتمالِ $P_{t,s}$ را به دست آورید.

ب ــ حالا فرض کنید ذره در ابتدا با توزیعِ یک‌نواخت بینِ $s_0$ و $s_1$ است. احتمالِ $P_{t,s}$ را به دست آورید.

۳.۳ ولگشتِ غیرِ متقارنی که احتمالِ رفتن به چپ $p$ و احتمالِ رفتن به راست $q$ است، در حضورِ دو دیوارِ کاملا انعکاسی در $s = 0$ و $s = a$ قرار دارد. شرطِ اولیه را $\tilde{P}_{0,s} = \delta_{s,s_0}$ بگیرید.

الف ــ احتمالِ پیدا کردنِ ولگرد در زمانِ $t$ و در مکانِ $s$، $\tilde{P}_{t,s}$، را به دست آورید.

ب ــ پس از زمان‌های طولانی حالت دستگاه چیست؟

۴.۳ ولگشتِ غیرِ متقارنی که احتمالِ رفتن به چپ $p$ و احتمالِ رفتن به راست $q$ است، در حضورِ دیواری قرار دارد. شرطِ اولیه را $\tilde{P}_{0,s} = \delta_{s,s_0}$ بگیرید. احتمالِ پیدا کردنِ ولگرد در زمانِ $t$ و در مکانِ $s$، $\tilde{P}_{t,s}$، را در دو حالتِ زیر به دست آورید.

الف ــ فرض کنید دیواری منعکس کننده در مبدا است.

ب ــ فرض کنید دیواری کاملاً جاذب در مبدا است.

۵.۳ ولگشتِ متقارنی در حضورِ دیواری قرار دارد. شرطِ اولیه را $\tilde{P}_{0,s}$ بگیرید. احتمالِ پیدا کردنِ ولگرد در زمانِ $t$ و در مکانِ $s$، $\tilde{P}_{t,s}$، را در دو حالتِ زیر به دست آورید.

الف ــ فرض کنید دیواری منعکس کننده در مبدا است.

ب ــ فرض کنید دیواری کاملاً جاذب در مبدا است.

۶.۳ ولگردی را در نظر بگیرید که در هر گامِ زمانی، با احتمالِ $1/3$ دو قدم به راست و با احتمالِ $2/3$ یک قدم به چپ برود. احتمالِ آن‌که در پله‌یِ $N$اُم در جای‌گاهِ $n$ باشد، چه‌قدر است؟

۷.۳ ولگشتِ غیرِ متقارنی با دو دیوارِ جاذب در $s = 0$ و $s = N$ که احتمالِ رفتنِ به راست $r$ و احتمالِ رفتنِ به چپ $\ell$ ، احتمالِ آن‌که سرجایش بایستد را $u$ است، را در نظر

بگیرید. احتمالِ آن‌که در ابتدا در $s = n$ باشد و جذبِ دیوارِ سمتِ راست شود چه‌قدر است؟

۸.۳ الف ــ ول‌گشتِ متقارن در حضورِ دیوارِ کاملاً جاذب در مبدا را در نظر بگیرید. اگر ول‌گرد در ابتدا در $s = 1$ باشد، احتمالِ آن‌که بالاخره جذبِ دیوارِ در مبدا شود چه‌قدر است؟ اگر ابتدا در جای‌گاهِ $s = n$ باشد، احتمالِ آن‌که بالاخره جذبِ دیوارِ در مبدا شود چه‌قدر است؟

ب ــ ول‌گشتِ غیرِ متقارنی که احتمالِ رفتنِ به راست $r$ و احتمالِ رفتنِ به چپ $\ell \geq r$ است، در حضورِ دیواری کاملاً جاذب قرار دارد. اگر ول‌گرد در ابتدا در $s = 1$ باشد، احتمالِ آن‌که بالاخره جذبِ دیوارِ در مبدا شود چه‌قدر است؟ اگر ابتدا در جای‌گاهِ $s = n$ باشد، احتمالِ آن‌که بالاخره جذبِ دیوارِ در مبدا شود چه‌قدر است؟ جواب‌های‌تان به ازایِ $\ell < r$ چیست؟

ج ــ میانگینِ زمانِ جذب در هر حالت چه‌قدر است؟

د ــ حالا فرض کنید، مساله ول‌گشتِ نامتقارنی باشد که ول‌گرد در هر گامِ زمانی با احتمالِ $u$ سرِ جایِ خود می‌ایستد، با احتمالِ $r$ به راست می‌رود، و با احتمالِ $\ell$ به چپ باشد، احتمالِ آن‌که بالاخره جذبِ دیوارِ در مبدا شود چه‌قدر است؟

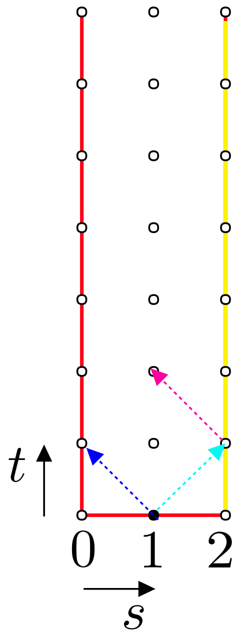
ه ــ اگر به جایِ دیوارِ جاذب دیوار انعکاسی باشد، احتمالِ آن‌که بالاخره به دیوارِ در مبدابرسد، چه‌قدر است؟

۹.۳ ول‌گشتِ غیرِ متقارن با یک دیوارِ انعکاسی در سمتِ راست و یک دیوارِ جاذب در سمتِ چپ.

ول‌گرد اگر به دیوارِ انعکاسی برسد با احتمالِ 1 به چپ می‌رود و در بقیه نقاط با احتمالِ $p$ به راست و با احتمالِ $q$ به چپ می‌رود. وقتی به دیوارِ جاذب می‌رسد هم جذبِ دیوار می‌شود.

الف۱ ــ یک دیوارِ کاملاً جاذب در $s = 0$ و یک دیوارِ کاملاً انعکاسی در $s = 2$ قرار دارد. در ابتدا ول‌گرد در $s = 1$ است. احتمالِ آن‌که بالاخره در دیوارِ جاذب گیر بیفتد، چه‌قدر است؟

الف۲ ــ احتمالِ آن‌که هیچ‌گاه جذبِ دیوارِ جاذب نشود، چه‌قدر است؟




شکل ۹.۳ ولگشتِ در حضورِ یک دیوارِ کاملاً جاذب و یک دیوارِ کاملاً انعکاسی. شکل مربوط به مسئله‌یِ ۹.۳.

الف۳ــ زمانِ میانگینِ جذب به دیوارِ جاذب چه‌قدر است؟

بــ دیوارِ کاملاً جاذب در $s = 0$ و دیوارِ کاملاً انعکاسی در $s = N$ هستند. اگر ول‌گرد از جای‌گاهِ $s = n$ شروع کند، احتمالِ جذب شدن به دیوارِ جاذب را با $A_n$ نشان می‌دهیم.

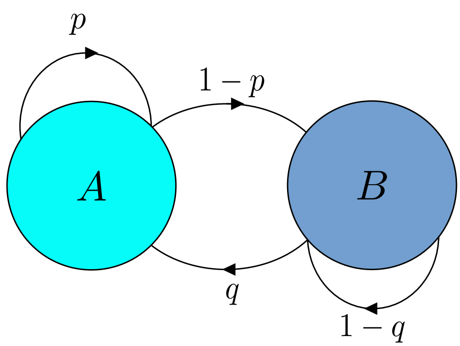
ب۱ ــ معادله‌یِ مادر برایِ این احتمال را بنویسید.

ب۲ ــ شرطِ مرزی برایِ مرزِ چپ یعنی $s = 0$ چیست؟

ب۳ــ شرطِ مرزی برایِ مرزِ راست رابطه‌ای بین $A_N$ و $A_{N-1}$ است. این شرطِ مرزی چیست؟

ب۴ ــ احتمالِ جذب شدن به دیوارِ جاذب، $A_n$ را به دست آورید.

۱۰.۳ در مثالِ ۳.۳.۳ در ابتدا سیستم در حالتِ 1 است. به ازایِ $p = 1,\ q = 0$ حالتِ نهایی چیست؟




شکل ۱۰.۳ شکلِ مسئله‌ی ۱۲.۳.

۱۱.۳ الف_ دو گل‌دان داریم و چهارتوپ که دوتایِ آن‌ها قرمز در گل‌دانِ اول و دوتایِ آن‌ها آبی در گل‌دانِ دوم هستند. در هر پله‌یِ زمانی از هر گل‌دان یک گلوله در می‌آوریم و جابه‌جا می‌کنیم. پس از زمانِ طولانی توزیعِ توپ‌ها در گلدان‌ها چه‌گونه است؟ اگر شرایطِ اولیه را عوض کنیم، نتیجه‌یِ نهایی تغییر می‌کند؟

ب_ اگر در گل‌دانِ اول سه توپِ قرمز و در گل‌دانِ دوم دو توپِ آبی باشد، جوابِ شما چه می‌شود؟

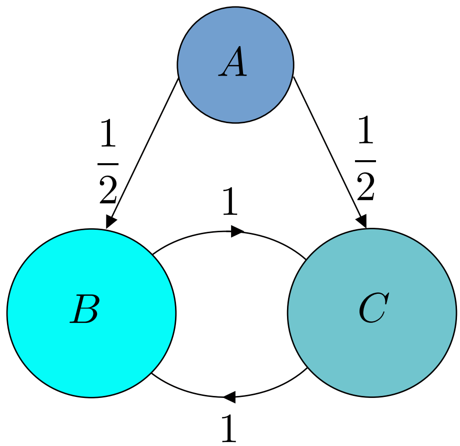
۱۲.۳ ماشینِ مطابقِ شکلِ ۱۰.۳ در نظر بگیرید. دستگاه در زمانِ $t=0$ از حالتِ $A$ شروع می‌کند.

الف_ میانگینِ زمانی‌ای که برایِ اولین بار به حالتِ $B$ برود، چه‌قدر است؟

ب_ میانگینِ زمانی‌ای که برایِ اولین بار به حالتِ $A$ برگردد، چه‌قدر است؟

۱۳.۳ ماشینی مطابقِ شکلِ ۱۱.۳ در نظر بگیرید.فرض کنید سیستم در ابتدا در حالتِ $A$ است. پس از زمانِ طولانی توزیعِ احتمالِ سیستم در حالت‌هایِ مختلف چه‌گونه است؟

۱۴.۳ فرض کنید که در سرزمینی در فصلی زمستانی احتمالِ دو روزِ آفتابی‌ی پشتِ سرهم صفر باشد. بعد از هر روزِ آفتابی با احتمالِ مساوی‌ِ $1/2$ هوا بارانی یا برفی خواهد بود. بعد از هر روزِ بارانی به احتمالِ $1/2$ هوا بارانی و با احتمالِ مساوی‌ِ $1/4$ هوا آفتابی یا برفی است. بعد از هر روزِ برفی نیز به احتمالِ $1/2$ درصد هوا برفی و با احتمالِ مساوی‌ِ $1/4$ هوا آفتابی یا بارانی است. پس از زمانِ طولانی احتمالِ آن‌که هوا آفتابی،




شکل ۱۱.۳ شکلِ مسئله‌ی ۱۳.۳.

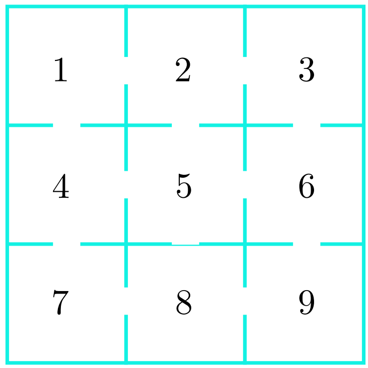
بارانی، و یا برفی باشد چه‌قدر است؟

۱۵.۳ موشی در اتاقِ یکِ مارپیچ شکلِ ۱۲.۳ رها می‌شود. با زدنِ زنگ ، درهای بینِ اتاق‌ها باز می‌شود و موش به طور کاتوره‌ای بینِ اتاق‌های مختلف حرکت می‌کند. هر اتاق دو، سه یا چهار در دارد که امکانِ عبور از آن‌ها را هم‌احتمال می‌گیریم، مثلاً وقتی موش در اتاقِ یک است با احتمال $\frac{1}{2}$ به اتاقِ دو و با احتمال $\frac{1}{2}$ به اتاقِ چهار و اگر در اتاقِ دو باشد با احتمال‌های $\frac{1}{3}$ به اتاق‌های یک، پنج، یا سه می‌رود. پس از زمانِ طولانی توزیعِ احتمالِ حضورِ موش در خانه‌های مختلف چه‌گونه است؟

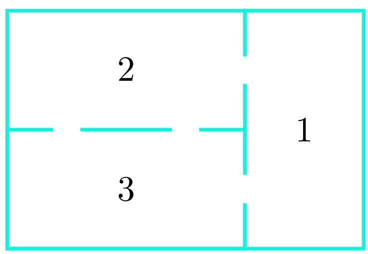
۱۶.۳ موشی در خانه‌ی ۱ ِ مارپیچ شکلِ ۱۳.۳ رها می‌شود. با زدنِ زنگ، موش به طور کاتوره‌ای بینِ خانه‌های مختلف حرکت می‌کند. امکانِ عبور از همه‌ی درهایی که در هراتاق در دسترسِ موش است، برابراست یعنی وقتی در خانه‌ی ۱ است با احتمالِ $\frac{1}{2}$ به خانه‌ی ۲ و با احتمالِ $\frac{1}{2}$ به خانه‌ی ۳ می‌رود و اگر در خانه‌ی ۲ باشد با احتمالِ $\frac{1}{3}$ از هر در بیرون می‌رود.

الف_ وقتی زنگ برای بارِ $n$اُم زده می‌شود، موش کجاست؟ در این مدت موش چه کسرِ زمانی‌ای را در هر اتاق گذرانده است؟

ب_ پس از زمانِ طولانی توزیعِ احتمالِ حضورِ موش در خانه‌های مختلف چه‌گونه است؟




شکل ۱۲.۳ شکلِ مسئله‌یِ ۱۵.۳.




شکل ۱۳.۳ شکلِ مسئله‌یِ ۱۶.۳.

۱۷.۳ الف– ولگشتِ ساده‌یِ متقارنی را در نظر بگیرید. احتمالِ آن که ولگردی که در ابتدا در مبدا است، بالاخره به جای‌گاهِ $1$ برسد، چه‌قدر است؟ این احتمال برایِ رسیدن از مبدا به جای‌گاهِ $n$ چه‌قدر است؟

ب– برایِ ولگشتِ نامتقارن که احتمال به جلو و عقب رفتن $p$ و $q$ که $p > q$ است، احتمالِ آن که ولگردی که در ابتدا در مبدا است، بالاخره به جای‌گاهِ $1$ برسد، چه‌قدر است؟ این احتمال برایِ رسیدن از مبدا به جای‌گاهِ $n > 0$ چه‌قدر است؟ این احتمال برایِ رسیدن از مبدا به جای‌گاهِ $n < 0$ چه‌قدر است؟

ج– مساله‌یِ ولگشتِ متقارن در حضورِ دیواری انعکاسی در مبدا را در نظر بگیرید. اگر ولگرد در ابتدا در جایگاهِ $n = 1$ باشد، احتمالِ آن‌که سرانجام به مبدا برود، چه‌قدر است؟ اگر ولگرد در ابتدا در مبدا باشد، احتمالِ آن‌که سرانجام به $n = 1$ برود، چه‌قدر است؟ احتمالِ آن‌که سرانجام به $n = 2$ برود، چه‌قدر است؟

د– مساله‌یِ ولگشتِ غیرِ متقارن که احتمال به جلو و عقب رفتن $p$ و $q$ است، در حضورِ دیواری انعکاسی در مبدا را در نظر بگیرید. اگر ولگرد در ابتدا در مبدا باشد، احتمالِ آن‌که سرانجام به $n = 1$ برود، چه‌قدر است؟ احتمالِ آن‌که سرانجام به $n = 2$ برود، چه‌قدر است؟

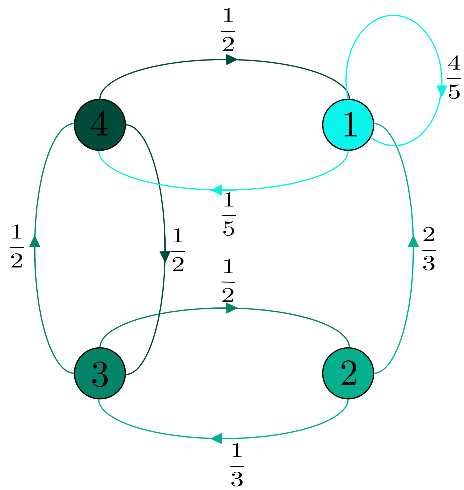
۱۸.۳ ولگردی در ابتدا در جای‌گاهِ $k$اُم بین دو دیوارِ جاذب در $n = 0$ و $n = N$ است. احتمالِ جلو رفتن و عقب رفتن برابر با $\alpha$ است. احتمالِ آن‌که سر جایش بایستد $\beta = 1 - 2\alpha$ است. احتمالِ آن که جذب دیوارِ واقع در $n = N$ شود چه‌قدر است؟ احتمالِ آن که جذب دیوارِ واقع در $n = 0$ شود چه‌قدر است؟ میانگینِ زمانی که طول می‌کشد تا ولگردی که ابتدا از جای‌گاهِ $k$اُم شروع کرده جذبِ یکی از دیوارها شود را به دست آورید.

۱۹.۳ فرض کنید در ابتدا یک تک‌ذره‌یِ $A$ وجود دارد. این ذره با احتمالِ $A$ به دو ذره تبدیل می‌شود و با احتمالِ $B := 1 - A$ نابود می‌شود. احتمالِ آن‌که در پله‌یِ زمانی‌یِ $t$ ذره‌ای باقی نمانده باشد چه‌قدر است؟ پس از زمانِ طولانی این احتمال چه‌قدر است؟

۲۰.۳ نوزادِ چهارحالته!

یک نوزاد می‌تواند در چهار حالتِ ۱) خوابیدن ۲) گریه‌کردن ۳) بازی‌کردن و ۴) خوردن

باشد. مدلِ این نوزاد را مثلِ یک زنجیره‌یِ مارکُفِ زمان‌گسسته با ماشینی که در شکلِ ۱۴.۳ می‌بینید در نظر بگیرید. اگر در یک پله‌یِ زمانی خواب باشد، در پله‌یِ بعدی با




شکل ۱۴.۳ نوزادِ چهارحالته! شکلِ مسئله‌یِ ۲۰.۳.

احتمالِ $\frac{4}{5}$ خواب است و با احتمالِ $\frac{1}{5}$ در حالِ خوردن است. اگر در یک پله‌یِ زمانی در حالِ گریه باشد، در پله‌یِ بعدی با احتمالِ $\frac{2}{3}$ خواب است و با احتمالِ $\frac{1}{3}$ در حالِ بازی است. اگر در یک پله‌یِ زمانی در حالِ بازی باشد، در پله‌یِ بعدی با احتمالِ $\frac{1}{2}$ در حالِ گریه است و با احتمالِ $\frac{1}{2}$ در حالِ خوردن است. و بالاخره اگر در یک پله‌یِ زمانی در حالِ خوردن باشد، در پله‌یِ بعدی با احتمالِ $\frac{1}{2}$ خواب است و با احتمالِ $\frac{1}{2}$ در حالِ بازی است. پس از مدتِ طولانی با چه احتمالی در چه حالتی است؟ آیا این نتیجه به این‌که در ابتدا در چه حالتی بوده بستگی دارد؟

۲۱.۳ فرض کنید در ابتدا یک تک‌ذره‌یِ $A$ وجود دارد. این ذره با نرخِ $a$ به دو ذره تبدیل می‌شود و با همین نرخِ نابود می‌شود.

$$A \to AA, \quad a,$$

$$A \to \emptyset, \quad a.$$

الف_ معادله‌یِ مادر برایِ احتمالِ آن‌که در زمانِ $t$ جمعیت $n$ باشد، را به دست آورید.

ب_ تعدادِ متوسطِ ذره در زمانِ $t$، یعنی $\langle n\rangle_t$ چه‌قدر است؟

ج_ احتمالِ انقراض پس از زمانِ طولانی چه‌قدر است؟

د_ احتمالِ انقراض در زمانِ $t$ چه‌قدر است؟

۲۲.۳ در مثالِ ۲.۴.۳ و در رابطه‌یِ ۲۲۲.۳ معادله‌یِ مادر برایِ احتمالِ آن‌که در زمانِ $t$ جمعیت $n$ باشد، را به دست آوردیم.

الف_ معادله‌یِ تحولِ زمانی‌یِ $\langle n^2\rangle$ و $\langle(\delta n)^2\rangle$ که $\delta n := n - \langle n\rangle$ است، را به دست آورید.

ب_ به ازایِ شرطِ اولیه

$$P_n(0) = \delta_{n,1} \tag{۳۰۸.۳}$$

$\langle n\rangle$ و $\langle(\delta n)^2\rangle$ را به عنوانِ تابعی از زمان به دست آورید.

۲۳.۳ شبکه‌ای یک بُعدی و بی‌نهایت طویل در نظر بگیرید. ذره‌یِ $A$ می‌تواند با نرخِ $\alpha$ به چپ و راست حرکت کند. وقتی دو ذره در مجاورتِ هم‌دیگر قرار می‌گیرند با نرخِ $\beta$ نابود می‌شوند.یک ذره هم اگر جای‌گاهِ مجاورش خالی باشد با نرخِ $\gamma$ خودبه خود نابود می‌شود.

$$\begin{aligned}
\bullet\circ &\to \circ\bullet, && \alpha,\\
\circ\bullet &\to \bullet\circ, && \alpha,\\
\bullet\bullet &\to \circ\circ, && \beta,\\
\circ\bullet &\to \circ\circ, && \gamma,\\
\bullet\circ &\to \circ\circ, && \gamma,
\end{aligned}$$

الف_ معادله‌یِ مادر برایِ تحولِ تابعِ تک‌نقطه‌ای $\langle n_i\rangle$ را بنویسید.

ب_ آیا با انتخابِ نرخ‌ها می‌توان کاری کرد در تحولِ تابعِ تک‌نقطه‌ای $\langle n_i\rangle$ توابعِ دونقطه‌ای ظاهر نشوند؟

ج_ در زمان‌هایِ بلند تابعِ تک‌نقطه‌ای به چه مقداری میل می‌کند؟ چرا؟
د_ تابعِ تک‌نقطه‌ای را به عنوانِ تابعی از زمان به دست آورید.

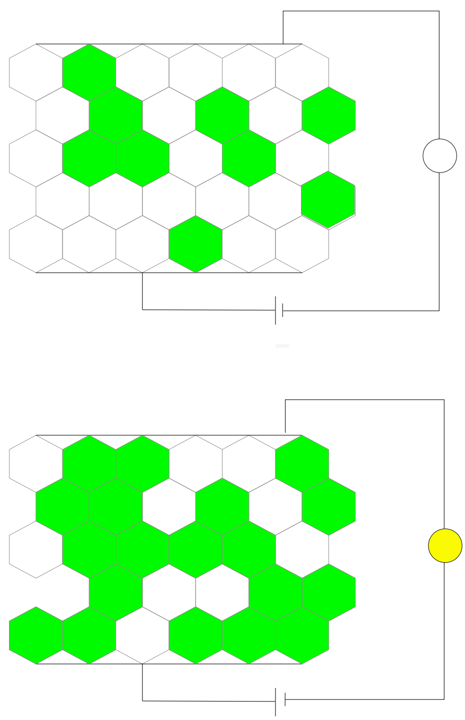
# ۴
# تراوش

## ۱.۴ تراوش

پرکولاسیون[۱] یا تراوش یکی از ساده‌ترین مدل‌هایی است که گذارِ فاز دارد. علی‌رغمِ سادگی تراوش به عنوانِ مدلی برایِ بررسی‌یِ مسائلی از فیزیک، تکنولوژی، سامانه‌هایِ اجتماعی استفاده می‌شود. مدلِ ساده‌ای از یک مدارِ الکتریکی مطابقِ شکلِ (۱.۴) در نظر بگیرید که شبکه‌ای لانه‌زنبوری و نارسانا است. رویِ این شبکه می‌توانیم قطعه‌هایِ رسانا که با رنگِ زرد نشان داده شده‌اند را قرار دهیم. اگر تعدادِ قطعه‌هایِ رسانا کم باشد لامپ خاموش و اگر تعدادِ آن‌ها خیلی زیاد شود، بدیهی است که لامپ روشن می‌شود. تعدادِ سلول‌هایِ این شبکه را $N$ بگیرید. در حدِّ $N$ِ بزرگ، اگر تعدادِ قطعه‌هایِ رسانا از یک $n_c$ بزرگ‌تر شود یا به تعبیری احتمالِ این‌که سلولی که به صورتِ تصادفی انتخابِ می‌کنیم، $p$ از یک مقدارِ بحرانی $p_c := n_c/N$ بزرگ‌تر باشد، لامپ روشن و در غیرِ این صورت خاموش است. این یک مثالِ ساده از گذارِ از فازِ نارسانا به فازِ رسانا است. در حالتی که تعدادِ قطعه‌هایِ رسانا کم است، اندازه‌یِ متوسطِ خوشه‌ها کوچک است. در شکلِ (۱.۴) سه تک‌سلول، یک خوشه‌یِ دو سلولی و یک خوشه‌یِ چهار سلولی می‌بینیم. اما در حالتی که تعدادِ قطعه‌هایِ رسانا زیاد است، اندازه‌یِ متوسطِ خوشه‌ها بزرگ است. هر چند خوشه‌یِ دو سلولی هم داریم ولی خوشه‌یِ خیلی بزرگ هم داریم.

---

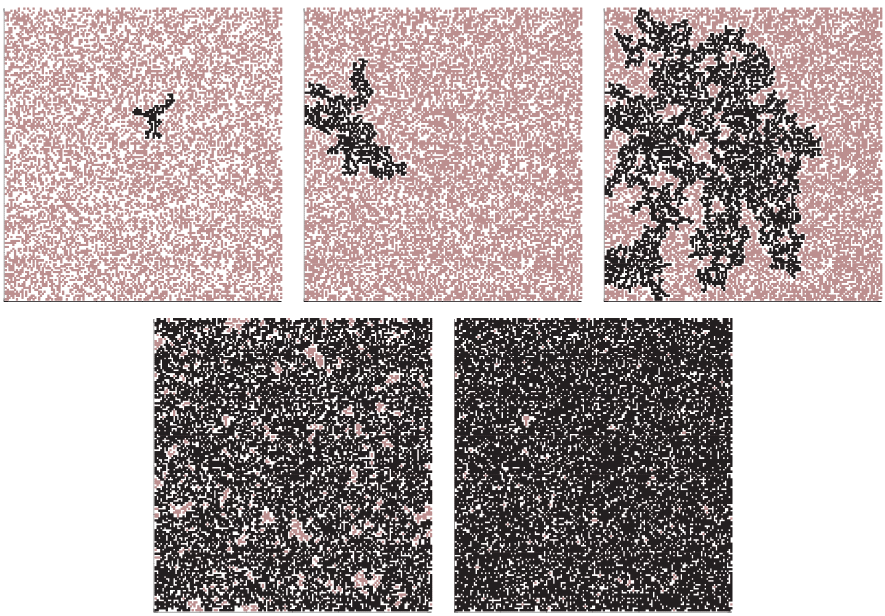
[۱] Percolation



شکل ۱.۴

در بعضی از شبکه‌هایِ خاص مثلِ حالتِ بدیهی‌یِ یک‌بعدی که $p_c := 1$ است، یا رویِ درختِ کیلی[۱] می‌توان $p_c$ را به صورتِ تحلیلی به دست آورد. برایِ بعضی شبکه‌ها مسئله را با شبیه‌سازی حل می‌کنند.

در شکلِ (۱.۴) شبکه‌یِ مربعی‌یِ $150 \times 150$ داریم. سلول‌ها مربعی و سلول‌هایِ خالی سفید هستند و بقیه پُر هستند. سلول‌هایِ درونِ یک خوشه حداقل یک یالِ مشترک دارند. بزرگ‌ترین خوشه سیاه‌رنگ است. احتمالِ اشغال به ترتیب $0.45, 0.55, 0.59, 0.65, 0.75$ است. با توجه به شکل احتمال‌هایِ بزرگ‌تر از $p = 0.59$ حتماً منجر به تراوش از بالا به پایین می‌شوند. شکل‌هایِ با $p > 0.59$ تراوا[۲] هستند. احتمالِ بحرانی‌یِ $p_c$ برای وقتی است که تعدادِ سلول‌ها بی‌نهایت بزرگ شود.



شکل ۲.۴ در شکل یک شبکه‌یِ مربعی‌یِ $150 \times 150$ داریم. نقاطی که سفید هستند خالی و بقیه پُر هستند. بزرگ‌ترین خوشه سیاه‌رنگ است. احتمالِ اشغال به ترتیب $0.45, 0.55, 0.59, 0.65, 0.75$ است. با توجه به شکل احتمال‌هایِ بزرگ‌تر از $p = 0.59$ حتماً منجر به تراوش از بالا به پایین می‌شوند.

---
[۱] Cayley Tree
[۲] Percolated

## ۲.۴ تراوش در شبکه‌ی یک‌بعدی

در یک‌بعد علی‌الاصول مسئله ساده‌تر است و ممکن است نسبت به ابعادِ بالاتر بتوان اطلاعاتِ تحلیلی‌ِ بیش‌تری به دست آورد. بنا بر این ما فعلاً خودمان را به مسئله‌یِ یک‌بعدی محدود می‌کنیم. شبکه‌ای یک‌بعدی با $N$ جای‌گاه در نظر بگیرید. احتمالِ این‌که یک جای‌گاه اشغال باشد که در شکلِ (۳.۴) جای‌گاهِ پُر با رنگِ سیاه نشان داده شده است را $p$ و قاعدتاً احتمالِ آن‌که خالی باشد $1-p$ است. فرض می‌کنیم احتمال برایِ دو جای‌گاهِ مختلف مستقل باشد. در این‌صورت این احتمال $p^2$ است.

شکل ۳.۴ شبکه‌ای یک‌بعدی با $N$ جای‌گاه. خانه‌هایِ سیاه‌رنگ جای‌گاه‌هایِ پُر هستند.

برایِ آن‌که شبکه تراوا باشد همه‌یِ جای‌گاه‌ها باید اشغال باشند. احتمالِ این روی‌داد

$$\Pi(p, N) = p^N \tag{۱.۴}$$

است. در حدِّ $N \to \infty$،

$$\lim_{N\to\infty} \Pi(p, N) = \begin{cases} 0, & p < 1, \\ 1, & p = 1. \end{cases} \tag{۲.۴}$$

بنا بر این $p_c = 1$. در حالتی که $p < 1$ است، سیستم تراوا نیست و احتمالِ وجودِ خوشه‌ها با ابعادِ مختلف وجود دارد. احتمالِ آن‌که یک جای‌گاهِ دل‌خواه پُر باشد $p$ و احتمالِ آن‌که یک جای‌گاهِ دل‌خواه و هم‌سایه‌یِ راستش (چپش) پُر باشند، $p^2$ است. احتمالِ آن‌که یک جای‌گاهِ دل‌خواه و یکی از دو هم‌سایه‌اش پُر باشند، $2p^2$ است. اگر این جای‌گاهِ معین دل‌خواه یکی از دو عضوِ یک خوشه‌یِ دوتایی باشد، باید این جای‌گاه و یکی از هم‌سایه‌هایش پُر باشند و دو طرفِ خوشه دو جای‌گاهِ خالی باشند. احتمالِ چنین روی‌دادی $2p^2(1-p)^2$ است. احتمالِ آن‌که یک جای‌گاهِ دل‌خواه عضوِ خوشه‌ای به طولِ $s$ باشد را با $P_s$ نمایش می‌دهیم. این احتمال برابر است با

$$P_s = s(1-p)^2 p^s. \tag{۳.۴}$$

اگر رویِ همه‌یِ $s$ ها جمع ببندیم، احتمالِ آن است که جای‌گاهِ دل‌خواهی عضو یک خوشه به هر طولی باشد که معنی‌اش این است که این جای‌گاه حتماً باید پُر باشد. این احتمال همان $p$ است.

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{\infty} P_s = \sum_{s=1}^{\infty} s(1-p)^2 p^s \\ =&(1-p)^2 \sum_{s=1}^{\infty} s p_s \\ =&p(1-p)^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} \sum_{s=1}^{\infty} p^s \\ =&p(1-p)^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} \left(\frac{p}{1-p}\right) = p\end{aligned} \qquad (۴.۴)$$

هر جای‌گاهِ پُر حتماً عضوی از یک خوشه است. توجه داریم که ممکن است دو طرفِ این جای‌گاه خالی باشند که در این صورت خوشه تک‌عضوی است. احتمالِ شرطیِ $w_s$، احتمالِ این است که اگر بدانیم یک جای‌گاه پُر است، احتمالِ آن‌که این جای‌گاه عضوی از یک خوشه به طولِ $s$ باشد. قاعدتاً

$$p\, w_s = P_s, \quad \Rightarrow \quad w_s = \frac{P_s}{p} = s(1-p)^2 p^{s-1} \qquad (۵.۴)$$

این رابطه را به شکلِ

$$w_s = \frac{P_s}{\sum_{s'=1} P_{s'}} = \frac{P_s}{p} \qquad (۶.۴)$$

به شکل‌هایِ مختلفی می‌توانیم متوسطِ یک کمیت را تعریف کنیم. مثلاً

$$\begin{aligned}S(p) =& \sum_{s=1} s w_s \\ =& \sum_{s=1} s^2 (1-p)^2 p^{s-1} \\ =& \frac{(1-p)^2}{p} \sum_{s=1} s^2 p^s\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{(1-p)^2}{p}\left(p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\right)\sum_{s=1}p^s \\
&=\frac{1+p}{1-p} && (۷.۴)
\end{aligned}
$$

اندازه‌ی متوسطِ خوشه است. در این متوسط‌گیری اگر یک جای‌گاه به طورِ تصادفی انتخاب شود، اندازه‌ی متوسطِ خوشه‌ای که این جای‌گاه متعلق به آن است $S(p)$ است. ما مساله یک‌بعدی را بررسی کردیم و $p < p_c = 1$ است. و احتمالِ بزرگ‌تر از احتمالِ بحرانی بی‌معنی است. در نزدیکی‌ِ احتمالِ بحرانی

$$
\lim_{p\to p_c^-} S(p) = \frac{2}{1-p} \propto (p_c - p)^{-1} \qquad (۸.۴)
$$

$P_s$ را به شکلِ زیر هم می‌توانیم بنویسیم

$$
\begin{aligned}
P_s =&s(1-p)^2p^s \\
=&s(1-p)^2\,\mathrm{e}^{s\ln p} \\
=&s(1-p)^2\,\mathrm{e}^{-\frac{s}{s_\zeta}}, && (۹.۴)
\end{aligned}
$$

که $s_\zeta := -\dfrac{1}{\ln p}$. با استفاده از بسطِ

$$
\ln(1-\epsilon) = -\epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} + \cdots \approx -\epsilon \qquad (۱۰.۴)
$$

و برایِ $p \approx p_c = 1$ نتیجه می‌شود

$$
\ln(p) = \ln(1-(1-p)) \approx -(1-p). \qquad (۱۱.۴)
$$

بنا بر این

$$
s_\zeta = -\frac{1}{\ln p} \approx \frac{1}{1-p} = (p_c - p)^{-1}, \qquad (۱۲.۴)
$$

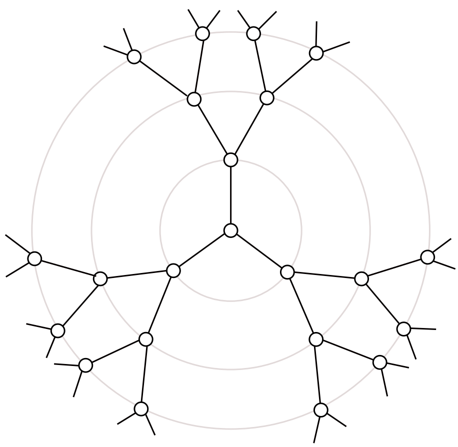
که نتیجه می‌دهد در نزدیکی‌ِ نقطه‌یِ بحرانی $s_\zeta$ واگراست. این نتیجه در ابعادِ بالا هم صادق است با تعریفِ نمایِ بحرانی‌ِ $\sigma$

$$
\lim_{p\to p_c} s_\zeta \propto |p_c - p|^{-1/\sigma}, \qquad (۱۳.۴)
$$

در یک بعد $\sigma = 1$ است.

## ۳.۴ تراوش در درختِ کیلی

مثالِ دیگری که قابلِ حل است، تراوایی رویِ درختِ کیلی است. چنان‌که از نامش پیداست درختِ کیلی شبکه‌ای است که رویِ آن حلقه وجود ندارد. از هر نقطه که شروع کنیم و در یک جهت از آن خارج شویم از مسیرِ دیگری نمی‌توانیم به آن نقطه وارد شویم. به هر درختِ کیلی یک عددِ نسبت داده می‌شود که تعدادِ همسایه‌هایِ هر جای‌گاه است و ما آن را با $z$ نمایش می‌دهیم. در شکلِ (۴.۴)، $z = 3$ است. شبکه‌یِ یک‌بعدی مثالی از درختِ کیلی با $z = 2$ است. شبکه‌یِ مربعی‌یِ دوبعدی به وضوح درخت نیست. از هر نقطه که خارج شویم مسیرهایِ متعددی وجود دارد که می‌توانیم به همان نقطه وارد شویم. از طرفِ دیگر بعدِ درختِ کیلی بی‌نهایت است. برایِ



شکل ۴.۴

این‌که ببینیم معنی‌یِ بعدِ بی‌نهایت چیست باید تعریفی کمّی از بعد داشته باشیم. در یک فضایِ $d$ بعدی اگر شکلی با ضریبِ $\alpha$ مقیاس شود حجمِ آن $\alpha^d$، وسطحِ آن $\alpha^{d-1}$ و نسبتِ حجم به سطح $\alpha$ برابر می‌شود. مثلاً برایِ یک کره به شعاعِ $R$ در سه بعد حجم متناسب با $\alpha^3$، سطحِ آن $\alpha^2$ و نسبتِ حجم به سطح $\alpha$ برابر می‌شود. برایِ یک فضایِ $d$ بعدی $\frac{V^{(d-1)/d}}{S}$ کمیتی ثابت است. بنا بر این برایِ یک فضایِ بی‌نهایت بعدی انتظار داریم حجم و سطح به یک صورت بزرگ

شوند. بیایید همین‌کار را برایِ شبکه‌یِ کیلی انجام دهیم. یک جای‌گاه را به عنوانِ جای‌گاهِ مرکزی انتخاب میکنیم. البته این جای‌گاه مشخصه‌یِ ویژه‌ای ندارد و همه‌یِ جای‌گاه‌ها مثل هم هستند. از این جای‌گاه $z$ رابط خارج می‌شود.از هر کدام از $z$ جای‌گاهِ بعدی $z-1$ رابط خارج می‌شود و به همین ترتیب این شاخه‌شاخه‌شدن ادامه پیدا می‌کند. در این صورت یک جای‌گاهِ مرکزی داریم و سپس در لایه‌یِ اول $z$ جای‌گاه که هرکدام از آن‌ها به $z-1$ جای‌گاه وصل می‌شوند. تعدادِ جای‌گاه‌ها تا لایه‌یِ $k$اُم عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} V_k =& 1 + z + z\cdot(z-1) + z\cdot(z-1)^2 + \cdots + z\cdot(z-1)^{k-1} \\ =& 1 + z\left[1 + (z-1) + (z-1)^2 + \cdots + (z-1)^{k-1}\right] \\ =& 1 + \frac{z[(z-1)^k - 1]}{(z-1)-1} \\ =& \frac{z(z-1)^k - 2}{z-2} \end{aligned} \tag{۱۴.۴}$$

این تعداد چیزی مثلِ حجم است. تعدادِ جای‌گاه‌هایِ لایه‌یِ آخر

$$S_k = z(z-1)^{k-1} \tag{۱۵.۴}$$

و نسبتِ این دو عبارت است از

$$\frac{V_k}{S_k} = \frac{z(z-1)^k - 2}{z(z-2)(z-1)^{k-1}} \tag{۱۶.۴}$$

که در حدِّ $k$ هایِ بزرگ حجم و سطح متناسب می‌شوند

$$\frac{V_k}{S_k} \sim \frac{z(z-1)^k}{z(z-2)(z-1)^{k-1}} = \frac{z-1}{z-2}. \tag{۱۷.۴}$$

نسبتِ حجم به سطح با مقیاس شدن تغییر نمی‌کند و این چیزی است که برایِ سیستم‌های بی‌نهایت‌بعدی انتظار داریم.

برایِ آن‌که حدِّ تراوایی را حساب کنیم از یک نقطه که مبدا می‌گیریمش شروع می‌کنیم و در یک جهت حرکت می‌کنیم. در هر رابط که جلو می‌رویم و به یک جای‌گاه می‌رسیم، $z-1$ امکان

برایِ مسیرِ بعدی وجود دارد. برایِ شروعِ تراوایی باید حداقل یک مسیر از این $z-1$ امکان بتواند به بی‌نهایت برود. هر جای‌گاه $z-1$ هم‌سایه دارد که با در نظر گرفتنِ این‌که احتمالِ اشغالِ هر جای‌گاه $p$ است، تعدادِ متوسطِ هم‌سایه‌هایِ بعدی‌یِ هر جای‌گاه برایِ آن‌که بتواند به مسیرش ادامه دهد، $(z-1)p$ است. اگر $(z-1)p<1$ باشد، احتمالِ یافتنِ مسیری که با گذشتن از جای‌گاه‌هایِ اشغال‌شده به بی‌نهایت برود به سمتِ صفر می‌رود. پس

$$p_c = \frac{1}{z-1}. \tag{۱۸.۴}$$

مثلاً برایِ $z=3$، $p_c=1/2$ است.

یک جورِ دیگر هم می‌شود به همین مساله نگاه کرد. رویِ درختِ کیلی حلقه نداریم، بنا بر این هر خوشه‌ای که طولش بی‌نهایت باشد حتما تا بی‌نهایت می‌رود. احتمالِ آن‌که یک جای‌گاهِ دل‌خواه متعلق به یک خوشه‌یِ به طولِ بی‌نهایت باشد را با $P(p)$ نمایش می‌دهیم و احتمالِ آن‌که یک جای‌گاهِ دل‌خواه از طریقِ یک رابطِ معین به بی‌نهایت وصل نشود را با $Q(p)$ نمایش می‌دهیم. برایِ این احتمال‌ها می‌توان روابطی به دست آورد. برایِ سادگی بیایید ابتدا حالتِ $z=3$ را بررسی کنیم. احتمالِ آن‌که یک جای‌گاهِ دل‌خواه متعلق به یک خوشه‌یِ به طولِ بی‌نهایت باشد، $P(p)$، برابر است با احتمالِ آن‌که آن جای‌گاه پُر باشد ضرب‌در احتمالِ آن‌که حداقل یک رابط به بی‌نهایت مربوط باشد. علاوه بر این احتمالِ آن‌که یک جای‌گاهِ دل‌خواه از طریقِ یک رابطِ معین به بی‌نهایت وصل نشود، $Q(p)$، برابر است با احتمالِ آن‌که یا آن سایت خالی باشد یا آن‌که اگر پُر بود به بی‌نهایت وصل نشود

$$\begin{aligned} P =& p\cdot(1-Q^3), \\ Q =& (1-p)+p\cdot Q^2. \end{aligned} \tag{۱۹.۴}$$

از حلِّ این دو معادله $Q$ و $P$ به دست می‌آیند

$$Q(p) = \begin{cases} 1, \\ \frac{1-p}{p}, \end{cases}$$
$$P(p) = \begin{cases} 0, \\ p\left(1-(\frac{1-p}{p})^3\right), \end{cases} \tag{۲۰.۴}$$

جوابِ اول یعنی $Q = 1$ و $P = 0$ متناظر با حالتِ زیربحرانی یعنی $p < p_c$ و جوابِ دوم متناظر با جوابِ فوقِ بحرانی یعنی $p > p_c$ است. در حالتی که $p = p_c = \frac{1}{2}$ شود دو جواب یکی می‌شوند. برایِ حالتِ $z$ ِ دل‌خواه به معادلاتِ

$$P = p \cdot (1 - Q^z),$$
$$Q = (1 - p) + p \cdot Q^{z-1}. \quad (۲۱.۴)$$

می‌رسیم که یک دست جوابِ بدیهیِ آن $Q = 1$ و $P = 0$ متناظر با حالتِ زیربحرانی یعنی $p < p_c$ است. اما معادله‌یِ مربوط به $Q$ چندجمله‌ای از مرتبه‌یِ $z - 1$ است، که علی‌الاصول $z-1$ جواب دارد. بعضی از جواب‌ها ممکن است مختلط باشند که قابلِ قبول نیستند. جواب‌هایِ بزرگ‌تر از یک یا منفی هم قابلِ قبول نیستند. برایِ این که ببینیم آن معادله چند جوابِ قابلِ قبول دارد کافی است که صفرهایِ تابعِ

$$f(Q) = pQ^{z-1} - Q + 1 - p \quad (۲۲.۴)$$

را بررسی کنیم. اولاً $f(0) > 0$ است و ثانیاً $f(1) = 0$ است. اما

$$f'(Q_0) = p(z-1)Q_0^{z-2} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_0 = \left(\frac{1}{p(z-1)}\right)^{1/(z-2)} \quad (۲۳.۴)$$

به این معنی است اگر $p(z-1) < 1$ باشد این تابع فرینه‌ای ندارد و در ناحیه‌یِ موردِ نظر ما هم نزولی است. بنا بر این

$$p_c = \frac{1}{z-1}. \quad (۲۴.۴)$$

است. در شکلِ (۵.۴) تابعِ $f(Q)$ برایِ مقادیرِ مختلفِ $p = 0.1, 0.2, \cdots, 0.9$ و $z = 6$ رسم شده است.

یک جوابِ بدیهی $Q = 1$ است و متناظر با $P = 0$ است. این جواب مستقل از $p$ است.

$$pQ^{z-1} - Q + 1 - p = 0,$$

شکل ۵.۴ تابعِ $f(Q)$ برای مقادیرِ مختلفِ $p = 0.1, 0.2, \cdots, 0.9$ و $z = 6$ رسم شده است.

$$p(Q-1)\left[\frac{Q^{z-1}-1}{Q-1}-\frac{1}{p}\right]=0,$$
$$p(Q-1)\left[Q^{z-2}+Q^{z-3}+\cdots+Q+1-\frac{1}{p}\right]=0, \tag{۲۵.۴}$$

در رابطه‌یِ آخر از

$$\sum_{k=0}^{N} x^k = \frac{x^{N+1}-1}{x-1} \tag{۲۶.۴}$$

استفاده کرده‌ایم. برایِ $p = p_c + \epsilon \gtrsim p_c$ می‌توان جوابِ دیگر را به طورِ تقریبی به دست آورد. در این حد انتظار داریم که $Q$ کوچک‌تر از یک شود. با استفاده از تقریبِ

$$Q \approx 1 + \epsilon Q^{(1)} \tag{۲۷.۴}$$

تا مرتبه‌یِ $\epsilon$ می‌رسیم به

$$(1+\epsilon Q^{(1)})^{z-2} + (1+\epsilon Q^{(1)})^{z-3} + \cdots + (1+\epsilon Q^{(1)}) + 1 - \frac{1}{p_c+\epsilon} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{z-2} 1 + \sum_{k=1}^{z-2} k\, \epsilon Q^{(1)} - \frac{1}{p_c}(1 - \frac{\epsilon}{p_c}) = 0,$$

$$z - 1 - \frac{1}{p_c} + \epsilon \left( \frac{(z-2)(z-1)}{2} Q^{(1)} + \frac{1}{p_c^2} \right) = 0. \tag{۲۸.۴}$$

با صفر قرار دادنِ ضرایبِ توان‌های مختلفِ $\epsilon$، از این‌جا نتیجه می‌شود

$$p_c = \frac{1}{z-1},$$

$$Q^{(1)} = -\frac{2}{p_c^2 (z-2)(z-1)}. \tag{۲۹.۴}$$

و تا این مرتبه

$$Q(p) \approx 1 - \frac{2(p-p_c)(z-1)}{p_c(z-2)}. \tag{۳۰.۴}$$

متناظر با این جواب می‌توان جوابی هم برای $P(p)$ به دست آورد. در حالت کلی

$$P = \begin{cases} 0, & p < p_c := \dfrac{1}{z-1} \\ \dfrac{2(p-p_c)z(z-1)}{(z-2)}, & p \gtrapprox p_c. \end{cases} \tag{۳۱.۴}$$

برای $p_c \gtrapprox p$ می‌رسیم به

$$P = \frac{2(p-p_c)z(z-1)}{(z-2)} \propto (p-p_c)^\beta \tag{۳۲.۴}$$

پس نمای $\beta$ برای درختِ کیلی $\beta = 1$ است.

# مسائل

۱.۴ نتایجی که برایِ $P(p)$ و $Q(p)$ به دست آوردید، برایِ مساله‌یِ یک‌بعدی، یعنی $z=2$ چه می‌شود؟

# ۵
# مدل‌هایی برایِ تحولِ جمعیت در زیست‌شناسی

در این فصل می‌خواهیم به موضوعِ مطالعه و استفاده از مدل‌هایِ ریاضی‌یِ واقع‌گرایانه و عملی برایِ بررسی‌یِ تحولِ جمعیت در زیست‌شناسی بپردازیم. ممکن است موضوعِ موردِ مطالعه، یک جمعیتِ انسانی با یا بدونِ توزیع سنی باشد، اپیدمی‌یِ یک بیماری، یا آن‌که مطالعه‌یِ جمعیتِ گونه‌هایِ در معرضِ انقراض، یا رشدِ یک نوع باکتری یا ویروس و یا غیرِ این‌ها باشد. هر چند این‌ها ظاهراً مسائلِ متفاوتی به نظر می‌رسند، شباهت‌هایی هم به هم دارند. با تغییراتِ کوچکی در مدل‌ها می‌توانیم مسائلِ متفاوتی را بررسی کنیم. مطالعه‌یِ این نوع مدل‌ها می‌تواند به درکِ فرآیندهایِ دینامیکی‌یِ این نوع مسائل کمک کند و در پیش‌بینی‌هایِ عملی کاربرد داشته باشد. اِکولوژی، اساساً بررسی‌یِ رابطه‌یِ بینِ گونه‌ها و محیطِ آن‌ها، مانند مساله‌یِ شکار و شکارچی و حضورِ کمیت‌هایِ موثر، نقش و سهمِ آن‌ها، مدیریتِ منابعِ تجدیدپذیر، جوامع چند گونه‌ای، سیستم‌های گیاه‌ــ گیاه‌خوار و ... حوزه‌ی وسیعی از کاربردِ این مطالعات است.

## ۱.۵ مدل‌هایِ تک‌ذره‌ای

هر چند مدل‌هایِ تک‌گونه‌ای بیش‌تر خاص و در حوزه‌یِ آزمایشگاهی است، اما در دنیایِ واقعی و

ماکروسکوپی هم می‌توانند مدل‌هایی برایِ بررسی و نشان‌دهنده‌یِ اثراتِ جملاتِ مختلفی باشند که بر تحول و پویاییِ‌یِ جمعیت تاثیر می‌گذارند. فرض کنید $N(t)$ تعدادِ متوسطِ یک گونه‌یِ خاص در زمانِ $t$ باشد. جملاتی که در تحولِ زمانیِ‌یِ آن نقش دارند، میزانِ تولد، مرگ و مهاجرتِ آن‌گونه هستند. بیایید در ساده‌ترین حالت گونه‌یِ موردِ مطالعه را مثلاً یک نوع باکتری در نظر بگیریم و تکثیرِ آن را مطالعه کنیم. فرض کنید این نوع باکتری در محیطی باشد که برایِ تکثیرش مساعد است و در هر ساعت یک باکتری به دو تا تبدیل می‌شود. در ساعتِ اول ما با نسلِ اولِ آن باکتری روبه‌روییم و در ساعت‌هایِ بعدی نسل‌هایِ بعدی به وجود می‌آیند. پس از یک روز تعدادِ آن‌ها چه‌قدر می‌شود؟ پس از یک ساعت یک باکتری به دو تا و پس از دو ساعت به چهارتا و پس از $10$ ساعت به $2^{10} = 1024$ و بالاخره پس از $24$ ساعت به $2^{24} \approx 2 \times 10^7$ تا تبدیل می‌شود. یعنی اگر در ابتدا تعدادِ باکتری‌ها $N_0$ باشد، پس از یک روز تعدادِ آن‌ها $N \approx 2 \times 10^7 N_0$ می‌شود. این رشد نمایی است و تغییرِ تعداد بر واحدِ زمان متناسب با $N$ است. بنا بر این

$$N_{t+\Delta t} = \beta N_t \Delta t + N_t = (\beta \Delta t + 1) N_t. \qquad (۱.۵)$$

که در این‌جا $\beta \Delta t = 1$ است. ما در این‌جا یک مدلِ ساده برایِ رشدِ جمعیت را در نظر گرفتیم و فرض‌هایِ ساده‌کننده‌یِ مختلفی کردیم. مثلاً از وابستگیِ‌یِ فضایی، برهم‌کنش‌هایِ دیگر و رقابت‌ها برایِ کسبِ منابع با گونه‌هایِ دیگر و تأثیراتِ خارجی چشم‌پوشی کردیم. ضمنِ این که ما نابودی را هم در نظر نگرفتیم. در حالی که در مدلِ واقعی انتظار داریم نسل هایِ مختلفی از یک موجود وجود داشته باشد. برایِ مدل‌سازیِ‌یِ بستگیِ‌یِ $N$ به $t$ این نکته را هم باید در نظر بگیریم که آیا نسل‌هایِ متوالی با هم هم‌پوشانی دارند یا نه. در بعضی از گونه‌ها بین نسل‌هایِ متوالی هم‌پوشانیِ‌یِ کمی وجود دارد و در بعضی گونه‌ها ممکن است که هم‌پوشانی زیاد باشد. اگر از تعدادِ یک گونه در زمانِ $t$ صحبت می‌کنیم، این‌ها عمدتاً متعلق به یک نسل هستند؟ یا آن‌که نسل‌هایِ مختلفی در آن سهم دارند؟ مثلاً بعضی از حشرات در هر روز نسل جدیدی می‌توانند داشته باشند، در حالی‌که برایِ سلول‌ها ممکن است این زمان از مرتبه‌یِ ساعت و برایِ موجوداتِ کوچک‌تر مقیاسِ زمانیِ‌یِ کوچک‌تری برایِ تغییرِ نسل وجود داشته باشد. در مثالِ تکثیرِ یک باکتری هم‌پوشانی بینِ نسل‌هایِ مختلفِ باکتری کم است و ما جمعیتِ باکتری‌ها $N$ را تابعی گسسته از پله‌یِ زمانیِ‌یِ $t$ گرفتیم و از کمیتی گسسته مثل $N_t$ برای $t = 0, 1, \cdots$ صحبت

کردیم. اگر بینِ نسل‌ها هم‌پوشانیِ زیادی وجود داشته باشد، ممکن است بتوانیم $N$ را تابعی پیوسته و هم‌وار از $t$ بگیریم. در این‌صورت (۱.۵ ) تبدیل می‌شود به

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \beta N. \tag{۲.۵}$$

جوابِ این معادله

$$N(t) = N_0 \mathrm{e}^{\beta t}, \tag{۳.۵}$$

است. اما این جواب قطعاً غیرِواقعی است. با گذشتِ زمان محدویت‌هایی رویِ تکثیرِ باکتری‌ها ایجاد می‌شود، مثلاً ما باید نرخِ مرگ و میر را هم در نظر بگیریم، یا محدودیتِ منابعِ غذایی می‌تواند عاملِ مهمی در جلوگیری از رشدِ نماییِ باکتری‌ها باشد. بیایید ابتدا اثرِ عاملِ مرگ را در نظر بگیریم. اگر نرخِ نابودیِ هر باکتری در زمانِ $\Delta t$ را با $\delta$ نشان دهیم، احتمالِ نابودیِ هر باکتری در همین زمانِ $\delta \Delta t$ است. این جمله باعثِ کاهشِ $N$ می‌شود. پس با استدلالی مشابهِ آن‌چه قبلاً انجام دادیم

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = (\beta - \delta) N \tag{۴.۵}$$

می‌شود، که جوابِ آن

$$N(t) = N_0 \mathrm{e}^{(\beta-\delta)t} \tag{۵.۵}$$

است. این جواب شبیهِ حالتِ قبل است با این تفاوت که نما می‌تواند منفی هم بشود. پس دو حالت ممکن است رخ دهد: اگر نرخِ تولد از نرخِ مرگ بزرگ‌تر باشد، یعنی $\beta > \delta$ باشد، جمعیت به طورِ نمایی زیاد می‌شود و اگر برعکس باشد، یعنی $\beta < \delta$، جمعیت به طورِ نمایی کم می‌شود. برایِ این‌که اثرِ مهاجرت را در نظر بگیریم باید جمله‌یِ $I$ که معرفِ نرخِ مهاجرت است را به سمتِ راست اضافه کنیم. بسته به این‌که مهاجرت به سیستم یا از آن به خارج باشد، این جمله می‌تواند مثبت یا منفی باشد. در این‌صورت

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = (\beta - \delta) N + I, \tag{۶.۵}$$

و جوابِ آن

$$N(t) = (N_0 + \frac{I}{\beta - \delta})\mathrm{e}^{(\beta-\delta)t} - \frac{I}{\beta - \delta}, \qquad (۷.۵)$$

است.

ملاحظه ۱.۱.۵

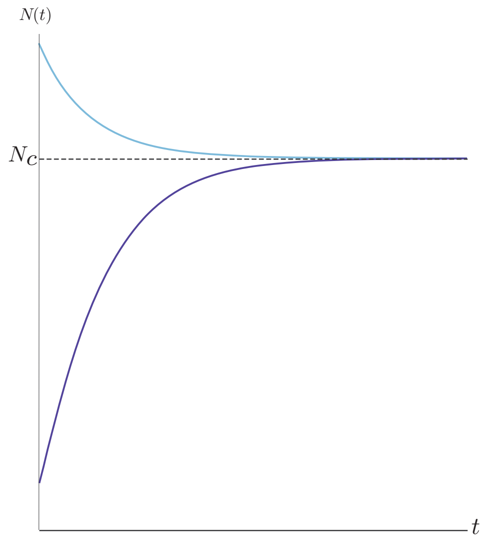
- در کارِ تجربی و به دست آوردنِ داده‌هایِ تجربی و آزمایش‌گاهی اندازه‌گیری معمولاً در بازه‌هایِ زمانیِ گسسته انجام می‌شوند. هر چند اگر داده‌ها زیاد باشند پارامترِ زمان تقریباً پیوسته است.
- در محاسبه‌یِ تحلیلی بیش‌تر از ابزارهایِ ریاضیِ زمان پیوسته و در محاسباتِ کامپیوتری از مدل‌هایِ زمان گسسته استفاده می‌کنیم.
- گاهی مدل‌هایِ زمان‌پیوسته را با گسسته‌کردن به عنوانِ تقریب بررسی می‌کنیم. مدل‌هایِ زمان‌گسسته را هم به تقریب می‌توان با روش‌هایِ تحلیلی در مدل‌هایِ زمان‌پیوسته بررسی کرد.
- گاهی در مساله مورد نظر ما مقیاس‌های زمانی متفاوتی وجود دارد که در تحلیلِ آن‌ها بهتر است از مدل‌هایِ زمان گسسته و یا از زمان پیوسته استفاده کنیم. بعضی پدیده‌ها اساساً زمان‌گسسته هستند، مثلاً بسیاری از حیوانات فصل و زمانِ معینی برایِ تخم‌گذاری و تولیدِ مثل دارند. در بعضی پدیده‌ها هم بهتر است از مدل‌هایِ زمان‌پیوسته استفاده کرد.

## ۲.۵ معادله‌یِ لجستیک

اثر محدودیتِ منابعِ غذایی یا مهاجرت (که دومی می‌تواند مثبت یا منفی باشد) را چگونه وارد کنیم؟ در حالتِ کلی می‌توانیم معادله‌یِ تحولِ جمعیت را به شکلِ

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = NF(N), \qquad (۸.۵)$$

بگیریم. فرض کنیم که تابعِ $F(N)$ تابعی تحلیلی باشد و به تقریب در $N$ ِ کوچک آن را همان




شکل ۱.۵ جوابِ معادله‌یِ لجستیک برایِ دو مقدار اولیه‌یِ متفاوتِ $N_0$.

چند جمله‌یِ اولِ بسطِ تیلورش بگیریم. پس

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = N\left[F(0) + NF'(0) + \cdots\right] \approx N\left(a - bN\right), \tag{۹.۵}$$

که $a := F(0) > 0$ یعنی نرخِ تولد از نرخِ مرگ بزرگ‌تر گرفته‌ایم و $b := -F'(0) > 0$ است. می‌خواهیم محدویتِ منابع که جلویِ تکثیرِ شدید و نمایی‌یِ جمعیت می‌گیرد را با منفی گرفتنِ $F'(0)$ برآورده کنیم. معادله‌یِ (۹.۵) به معادله‌یِ لجستیک[۱] معروف است. به ازایِ دو مقدارِ $N = 0, a/b$ سمتِ راستِ رابطه‌یِ (۹.۵) صفر می‌شود. به این‌ها نقاطِ ثابت[۲] می‌گویند. همان‌طور که از معادله هم پیداست اگر جمعیت از یک مقدارِ حدّی کوچک‌تر باشد $N < N_c := a/b$ جمعیت زیاد می‌شود. اما اگر $N > N_c := a/b$ باشد، جمعیت کم می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = aN\left(1 - \frac{N}{N_c}\right). \tag{۱۰.۵}$$

---
[۱] Logistic equation
[۲] Fixed point

از این معادله می‌توان انتگرال گرفت

$$\begin{aligned} \frac{N_c\,\mathrm{d}N}{N(N_c-N)} &= a\,\mathrm{d}t \\ \frac{\mathrm{d}N}{N}+\frac{\mathrm{d}N}{N_c-N} &= a\,\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{۱۱.۵}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} \ln\left[\frac{N(N_c-N_0)}{N_0(N_c-N)}\right] &= a\,t \\ N(t) &= \frac{N_0N_c\mathrm{e}^{at}}{N_c+N_0(\mathrm{e}^{at}-1)}, \end{aligned} \tag{۱۲.۵}$$

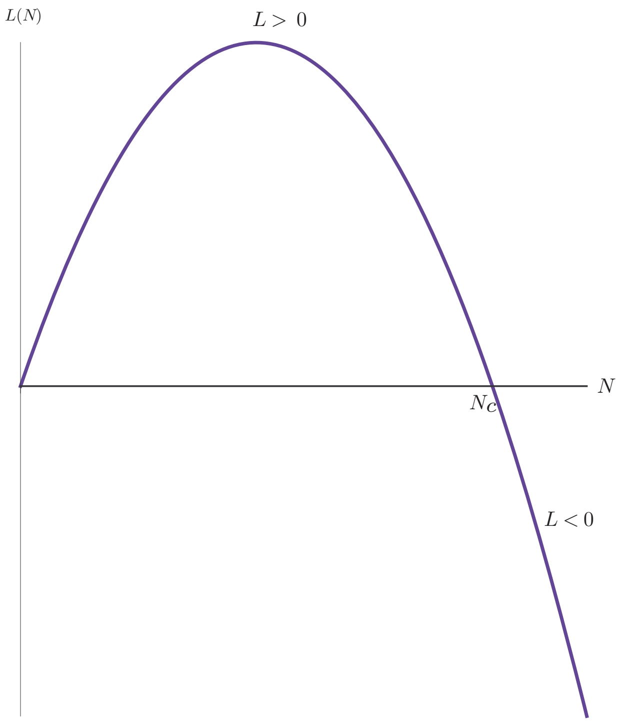
که $N(0) =: N_0$ است. پس از زمانِ طولانی $t\to\infty$، به ازای هر مقدارِ اولیه‌ی $N_0 \neq 0$، $N$ به سمتِ $N_c$ میل می‌کند. به اصطلاح می‌گویند این نقطه جاذب[۱] است. معادله‌ی لجستیک را می‌توان به شکلِ زیر نوشت

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = L(N) \tag{۱۳.۵}$$

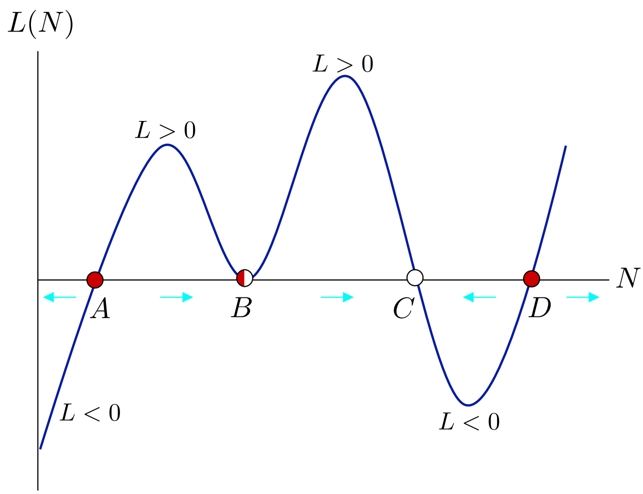
که در حالتی که بررسی کردیم، $L(N) = aN\left(1-\dfrac{N}{N_c}\right)$ است. در شکلِ (۲.۵)، $L(N)$ بر حسبِ $N$ رسم شده است. این تابع در دو نقطه‌ی $N=0$ و $N=N_c$ صفر می‌شود. اگر $N<N_c$ باشد، منابعِ غذایی به اندازه‌ی کافی است و جمعیت زیاد می‌شود. در حالتی‌که $N>N_c$ باشد، منابعِ غذایی به اندازه‌ی کافی نیست و نمی‌تواند نیازهای این اندازه جمعیت را تامین کند. در این حالت جمعیت به تدریج کم می‌شود تا در زمانِ بلند به حدودِ $N_c$ می‌رسد.

حالا بیایید حلِّ کلی‌ِ این نوع معادلات را بررسی کنیم. فرض کنید تابعِ $L(N)$ مطابقِ شکلِ (۳.۵) باشد. نقاطِ $A, B, C$ و $D$ نقاطِ ثابت هستند. در این نقاط $L=0$ و در نتیجه $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=0$ است. جاهایی‌که $L>0$ است، $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}>0$ و جاهایی‌که $L<0$ است، $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}<0$ است. نقاطِ $A$ و $D$ ثابت هستند ولی دافع[۲] هستند، به این معنی‌که اگر سیستم کمی مختل شود از این نقاط دور می‌شود. شکلِ (۳.۵) را ببینید. نقطه‌ی $C$ ثابت و جاذب است، به این معنی‌که

[۱] Attractive [۲] Repulsive




شکل ۲.۵ $L(N)$ بر حسبِ $N$.




شکل ۳.۵ $L(N)$ بر حسبِ $N$. نقاطِ $A$ و $D$ ثابت و دافع که با دایره‌یِ قرمز نشان داده شده‌اند و نقطه‌یِ $C$ ثابت و جاذب است که با دایره‌یِ سفید نشان داده شده‌است. نقطه‌یِ $B$ هم ثابت است ولی در یک جهت جاذب و در جهتِ دیگر دافع است. نیمی از دایره در این نقطه که ناپای‌دار است قرمز و نیمِ دیگر که پای‌دار است سفید است.

اگر سیستم کمی مختل شود به این نقطه برمی‌گردد. و بالاخره نقطه‌یِ $B$ هم ثابت است. در یک جهت جاذب و در جهتِ دیگر دافع است. این‌گونه نقاط عملاً دافع هستند، چون بالاخره اختلالی که در جهت دفع هم باشد ممکن است رخ دهد و در نهایت سیستم از این نقطه دور می‌شود. در معادله‌یِ لجستیک $N_c$ نقطه‌یِ جاذب است.

### ۱.۲.۵ معادله‌یِ لجستیکِ زمان‌گسسته

معادله‌یِ لجستیکِ زمان‌پیوسته

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = aN\left(1 - \frac{N}{N_c}\right). \tag{۱۴.۵}$$

است. نقاطِ ثابتِ این معادله $N=0$ و $N=N_c$ هستند. در این معادله فرض شده که نرخِ زاد و ولد و مرگ مستقل از زمان است و برایِ بررسیِ تحولِ جمعیتِ بعضی گونه‌ها مناسب است. اما این فرض برای پرندگان و بسیاری از حیوانات که فصل و زمانِ معینی برایِ تخم‌گذاری

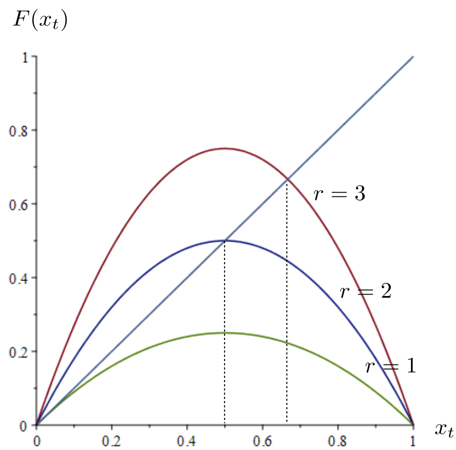
و تولیدِ مثل دارند، مناسب نیست. یکی از مدل‌ها استفاده از همان معادله‌یِ لجستیک ولی در حالتِ زمان‌گسسته است.

$$\frac{N_{t+\Delta}-N_t}{\Delta}=aN_t\left(1-\frac{N_t}{N_c}\right),$$
$$N_{t+\Delta}=(1+a\Delta)N_t\left(1-\frac{N_t a\Delta}{N_c(1+a\Delta)}\right). \qquad (۱۵.۵)$$

ممکن است به نظر آید، جواب‌های این معادله هم همان رفتارِ معادله‌یِ لجستیکِ زمان پیوسته را دارد. ولی این‌طور نیست. با بهنجار کردنِ تعدادِ موجودات و انتخابِ واحدِ زمانِ مناسب، معادله‌یِ لجستیکِ زمان‌گسسته تبدیل می‌شود به

$$x_{t+1}=F(x_t)=rx_t(1-x_t) \qquad 0\le x_t\le 1 \qquad (۱۶.۵)$$

از معادله‌یِ لجستیکِ زمان‌گسسته برایِ بررسی‌یِ رشدِ تومور هم استفاده شده است[۱]. $r$ پارامتری است که رفتارِ سیستم را تعیین می‌کند. نقاطِ ثابتِ معادله‌یِ (۱۶.۵)، $0$ و $1-\dfrac{1}{r}$ هستند. $x=0$

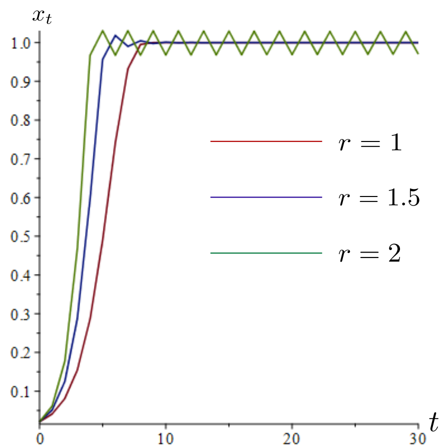



شکل ۴.۵ $F(x_t)$ بر حسبِ $x_t$.

که جوابِ بدیهی است. در معادله‌یِ لجستیکِ زمان‌پیوسته نقطه‌یِ ثابتِ دوم نقطه‌یِ جاذب بود و مستقل از شرایطِ اولیه به ازایِ هر $N(0)\neq 0$ سیستم به این حالت می‌رود.

[۱] S.S. Cross and D.W.K. Cotton. Chaos and antichaos in pathology. Human Pathol., 25:630–637, 1994.

بیایید همین مسئله را برای معادله‌ی لجستیکِ زمان‌گسسته بررسی کنیم. در شکلِ (۵.۵)، $x_t$ برای $t = 0, 1, \cdots 30$ و شرطِ اولیه‌ی $x_0 = 0.02$ به ازای سه مقدارِ $r = 1, 1.5, 2$ رسم شده است. همان‌طور که می‌بینیم به ازای $r = 1$ و $r = 1.5$ مقدارِ $x$ به نقطه‌ی ثابت میل می‌کند.

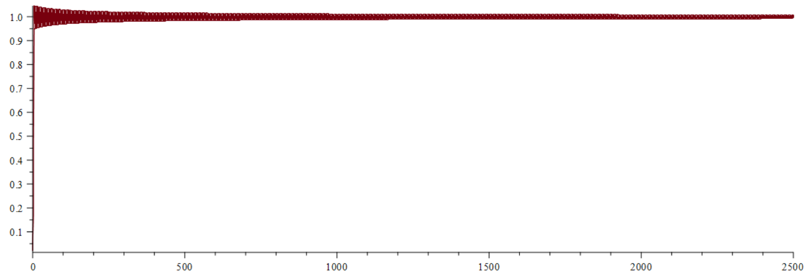



شکل ۵.۵ $x_t$ برای $t = 0, 1, \cdots 30$ و شرطِ اولیه‌ی $x_0 = 0.02$ به ازای سه مقدارِ $r = 1, 1.5, 2$ رسم شده است.

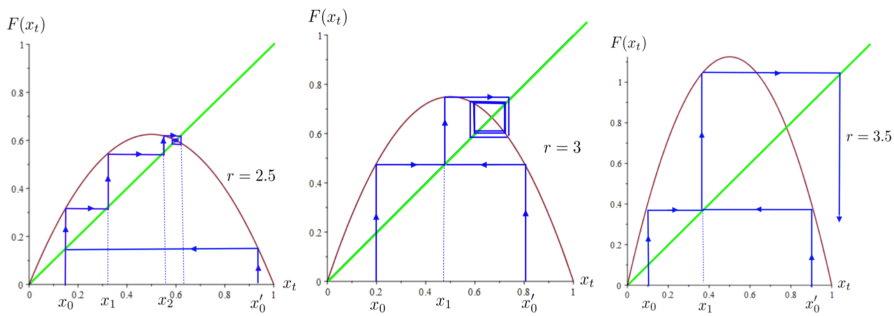
ولی برای $r = 2$ ظاهراً حولِ مقدارِ ثابت نوسان می‌کند.

در شکلِ (۶.۵)، $x_t$ برای $t = 0, 1, \cdots 2500$ و شرطِ اولیه‌ی $x_0 = 0.02$ به ازای $r = 2$ رسم شده است. همان‌طور که می‌بینیم در زمان‌های بلند جواب‌مان به مقدارِ ثابت میل می‌کند. همین‌جا یک فرق را با معادله‌ی لجستیکِ زمان‌پیوسته می‌بینیم. در آن‌جا $N(t)$ به طورِ یک‌نوا به نقطه‌ی ثابت میل می‌کرد، اما این‌جا مثلاً به ازای $r = 2$ حولِ نقطه‌ی ثابت نوسان می‌کند و پس از زمانِ طولانی به مقدارِ ثابتِ $x_c$ میل می‌کند.

یک راهِ دیگر برای بررسی‌ی نحوه‌ی نزدیک شدن به نقطه‌ی ایستا به جای حلِ مستقیم معادله‌ی (۱۶.۵) استفاده از روشِ گرافیکی است. در شکلِ (۷.۵)، $F(x_t)$ با دو شرطِ اولیه‌ی متفاوتِ $x_0$ و $x'_0$ به ازای $r = 2.5, 3, 3.5$ رسم شده است. همان‌طور که در این شکل هم می‌بینیم، در زمان‌های بلند جواب‌مان به ازای $r = 2.5$ حولِ نقطه‌ی ثابت نوسان می‌کند و پس از زمانِ طولانی به مقدارِ ثابتِ $x_c$ میل می‌کند. جواب‌مان به ازای $r = 3$ حولِ نقطه‌ی ثابت نوسان می‌کند و به



شکل ۶.۵ $x_t$ برایِ $t = 0, 1, \cdots 2500$ و شرطِ اولیه‌یِ $x_0 = 0.02$ به ازایِ $r = 2$ رسم شده است. $x_t$ حولِ نقطه‌یِ ثابت نوسان می‌کند و پس از زمانِ طولانی به مقدارِ ثابتِ $x_c$ میل می‌کند.




شکل ۷.۵ $x_t$ با دو شرطِ اولیه‌یِ متفاوتِ $x_0$ و $x'_0$ به ازایِ سه مقدارِ $r = 2.5, 3, 3.5$ رسم شده است.

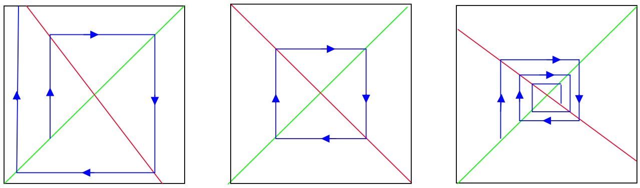
ازایِ $r = 3.5$ حتی ممکن است از نقطه‌یِ ثابت دور می‌شود (شاید هم مجدداً برگردد).

پارامتری که رفتار در نزدیکی‌یِ نقطه‌یِ ثابت را تعیین می‌کند، $\left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_c}$ است. اگر $|F'(x_c)| < 1$ باشد، نقطه‌یِ ثابت جاذب و پایدار است و اگر $|F'(x_c)| > 1$ باشد، نقطه‌یِ ثابت ناپایدار است. در حالتی که $F'(x_c) = -1$ باشد، حرکت چرخه‌ای به دورِ نقطه‌یِ ثابت است. شکلِ (۷.۵) را ببینید.

برایِ فهمِ بهترِ این موضوع بیایید فرض کنید به جوابی در نزدیکی‌یِ نقطه‌یِ ثابت رسیده‌ایم

$$x_t = x_c + u_t, \qquad |u_t| \ll 1. \tag{۱۷.۵}$$

با جای‌گذاری‌یِ این جواب در معادله‌یِ (۱۶.۵) ، بسطِ $F(x_c + u_t)$ حولِ نقطه‌یِ ثابتِ $x_c$




شکل ۸.۵ $|F'(x_c)|$ رفتار در نزدیکیِ نقطه‌ی ثابت را تعیین می‌کند.

می‌رسیم به

$$\begin{aligned} x_c + u_{t+1} =& F(x_c + u_t) \\ =& F(x_c) + F'(x_c)u_t + \cdots . \end{aligned} \tag{۱۸.۵}$$

اما چون $x_c = F(x_c)$ است، با چشم‌پوشی از جمله‌ی مرتبه‌دوم و بالاترِ $u_t$ نتیجه می‌شود

$$u_{t+1} = F'(x_c)u_t, \tag{۱۹.۵}$$

که جوابش

$$u_t = [F'(x_c)]^t u_0, \tag{۲۰.۵}$$

است. اگر $|F'(x_c)| < 1$ باشد، نقطه‌ی ثابت جاذب و پایدار است. به زبانِ دقیق‌تر

- اگر $0 < F'(x_c) < 1$ باشد، اختلال به طورِ یک‌نوا به سمتِ صفر می‌رود، اما اگر $-1 < F'(x_c) < 0$ باشد، حولِ نقطه‌ی ثابت نوسان می‌کند و دامنه‌اش به سمتِ صفر می‌رود.
- اگر $|F'(x_c)| > 1$ باشد، نقطه‌ی ثابت ناپایدار است. در این حالت نیز اگر $1 < F'(x_c)$ باشد، اختلال به طورِ یک‌نوا بزرگ می‌شود، اما اگر $F'(x_c) < -1$ باشد، حولِ نقطه‌ی ثابت نوسان می‌کند و دامنه‌اش بزرگ شود.
- در حالتی که $F'(x_c) = -1$ باشد، حرکت چرخه‌ای به دورِ نقطه‌ی ثابت است.

برگردیم به حلِ معادله‌ی (۱۶.۵). دیدیم که این معادله دو نقطه‌ی ثابت دارد

$$x_{1,c} = 0, \qquad F'(0) = r, \tag{۲۱.۵}$$

$$x_{2,c} = 1 - \frac{1}{r}, \qquad F'(1 - \frac{1}{r}) = 2 - r. \tag{۲۲.۵}$$

- اگر $0 < r < 1$ باشد، تنها جوابِ اول قابلِ قبول است و این جواب هم جاذب است. لازم هم نیست در نزدیکیِ این نقطه باشیم. به ازایِ هر مقدارِ قابلِ قبولی از شرایطِ اولیه

$$x_0 > x_1 > x_2 > \cdots \tag{۲۳.۵}$$

و پس از زمانِ طولانی، جواب به $x_{1,c} = 0$ میل می‌کند.

- وقتی $r$ بزرگ می‌شود و از $1$ عبور می‌کند، دو نقطه‌یِ ثابتِ قابلِ قبول داریم که $x_{1,c} = 0$ ناپایدار و $x_{2,c} = 1 - \frac{1}{r}$ پایدار و جاذب است. به این معنی می‌گوییم اولین انشعاب در $r = 1$ رخ می‌دهد.
- با گذشتن از این مقدار برایِ پارامترِ $r$ و در ناحیه‌یِ $1 < r < 3$ جوابِ $x_{1,c} = 0$ که پایدار بود، ناپایدار می‌شود و $x_{2,c} = 1 - \frac{1}{r}$ پایدار می‌شود. دومین انشعاب در $r = 3$ رخ می‌دهد. به ازایِ $r = 3$، $F' = -1$ و جوابِ دوره‌ای می‌شود.
- با گذشتن از این مقدار برایِ پارامترِ $r$ و در ناحیه‌یِ $3 < r$ جوابِ $x_{2,c} = 1 - \frac{1}{r}$ که پایدار بود، ناپایدار می‌شود. در این صورت هر دو جواب ناپایدارند. چه باید کرد؟ در معادله‌یِ (۱۶.۵)، $x_{t+1}$ بر حسبِ $x_t$ داده می‌شود. می‌توانیم $x_{t+2}$، $x_{t+3}$ و $\cdots$ را بر حسبِ $x_t$ بنویسیم.

$$x_{t+1} = F^{(1)}(x_t) = F(x_t) = rx_t(1 - x_t), \tag{۲۴.۵}$$

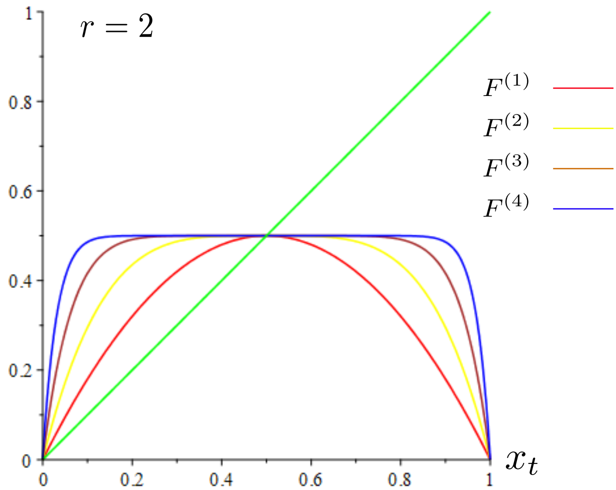
$$\begin{aligned} x_{t+2} &= F(x_{t+1}) = F(F(x_t)) = F^{(2)}(x_t), \\ &= r^2 x_t(1 - x_t)(1 - rx_t(1 - x_t)) \end{aligned} \tag{۲۵.۵}$$

$$\begin{aligned} x_{t+3} &= F(F(F(x_t))) = F^{(3)}(x_t) \\ &= r^3 x_t(1 - x_t)\left(1 - rx_t(1 - x_t)\right) \\ &\quad \times \left[(1 - r^2 x_t(1 - x_t)(1 - rx_t(1 - x_t))\right], \end{aligned} \tag{۲۶.۵}$$

$$\vdots$$

$$x_{t+n} = F^{(n)}(x_t) \tag{۲۷.۵}$$

در شکلِ (۹.۵) به ازای $r = 2$، $F^{(1)}$ تا $F^{(4)}$ بر حسبِ $x_t$ رسم شده‌اند. همان‌طور که می‌بینیم، به ازای $r = 2$، در مرتبه‌های بالاتر هم جوابِ جدیدی نداریم.

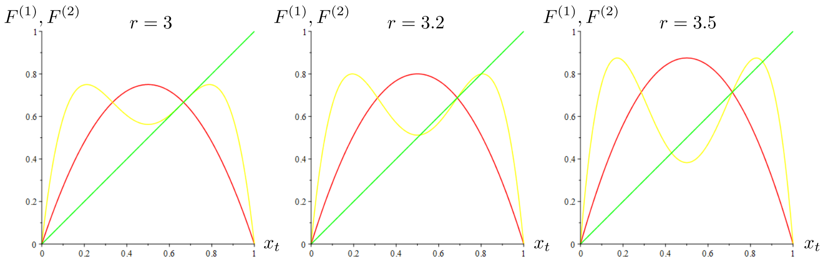



شکل ۹.۵ $F^{(1)}$ تا $F^{(4)}$ بر حسبِ $x_t$ به ازای $r = 2$.

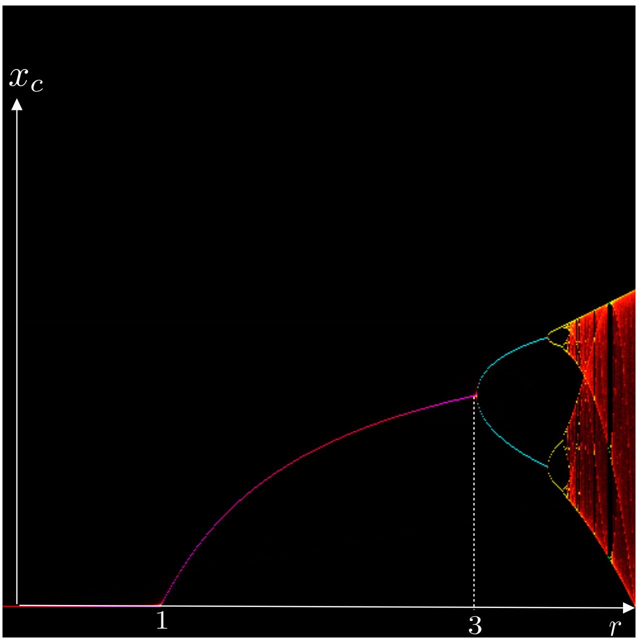
در شکلِ (۹.۵) به ازای $r = 3, 3.2, 3.5$، $F^{(1)}$ و $F^{(2)}$ بر حسبِ $x_t$ رسم شده‌اند. همان‌طور که می‌بینیم، به ازای $r > 3$، در مرتبه‌ی بالاتر چهار جوابِ جدید داریم، که دو تا از آن‌ها همان جوابِ قبلی است که ناپایدارند. اما دو جوابِ جدید پایدارند. در $r = 3$ انشعابِ دوم رخ می‌دهد. با بزرگ‌شدنِ $r$ این شاخه‌شاخه‌شدن ادامه پیدا می‌کند. شکلِ (۱۱.۵) را ببینید.

## ۲.۲.۵ مدلی برای شیوعِ حشرات

کِرمِ جوانه‌ی صنوبر یکی از مخرب‌ترین حشرات بومی در آمریکای شمالی است. بیش‌ترِ اوقات جمعیتِ آن‌ها کم است، اما در یک دوره‌ی تقریباً ۴۰ ساله یا کمی بیش‌تر، جمعیتِ کرم‌ها به شدت زیاد می‌شود، جنگل‌ها را ویران و بسیاری از درختان را نابود می‌کند. از شواهد برمی‌آید که این پدیده صدها سال است که ادامه دارد. چون این پدیده منجر به نابودیِ درختِ صنوبر

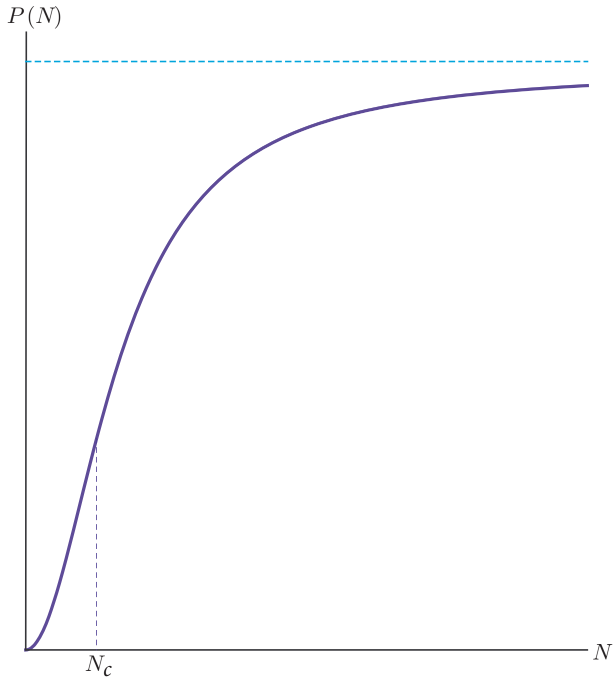



شکل ۱۰.۵ $F^{(1)}$ خمِ قرمز رنگ و $F^{(2)}$ خمِ زردرنگ بر حسبِ $x_t$ به ازایِ $r = 3, 3.2, 3.5$.




شکل ۱۱.۵ انشعاب برایِ معادله‌یِ لجستکِ زمان‌گسسته.

شده‌است، دست‌اندرکارانِ صنعتِ چوب مایل به درکِ این چرخه‌ها به عنوانِ اولین قدم برایِ یافتنِ راهی برایِ مدیریتِ این مساله هستند. وقتی جمعیتِ کرم‌ها کم است، پرندگان به سراغِشان نمی‌آیند. ولی وقتی جمعیتِ‌شان زیاد شد، پرندگان برایِ تغذیه از آن‌ها استفاده می‌کنند. اما یک حدِّ اشباع هم برایِ این مساله وجود دارد. به این معنا که پرندگان نمی‌توانند جلویِ شیوعِ آن‌ها




شکل ۱۲.۵ $P(N)$ بر حسبِ $N$.

را بگیرند. این منجر به اضافه‌شدنِ جمله‌ای به معادله‌یِ تحولِ جمعیت که در بخشِ قبل بررسی کردیم می‌شود. این جمله به‌صورت کیفی چیزی مثلِ شکلِ (۱۲.۵) است.

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = aN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - P(N). \quad (۲۸.۵)$$

فرض می‌کنیم

$$\lim_{N\to 0} P(N) = 0$$
$$\lim_{N\to\infty} P(N) = \text{ثابت} \quad (۲۹.۵)$$

مثلاً

$$P(N) = \frac{BN^2}{A^2 + N^2} \quad (۳۰.۵)$$

تابعی است که این خواص را برآورده می‌کند. با بی‌بُعد کردنِ

$$u := \frac{N}{A}, \qquad r := \frac{Aa}{B} \tag{۳۱.۵}$$
$$\tau := \frac{Bt}{A}, \qquad q := \frac{K}{A}$$

معادله‌یِ تحول را به شکلِ ساده‌تری می‌نویسیم

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = ru\left(1-\frac{u}{q}\right) - \frac{u^2}{1+u^2}. \tag{۳۲.۵}$$

رفتارِ این سیستم را دو پارامترِ $q$ و $r$ تعیین می‌کنند. برایِ این‌که نقاطِ ثابت را به دست آوریم باید ببینیم در چه نقاطی سمتِ راستِ معادله‌یِ تحول صفر می‌شود.

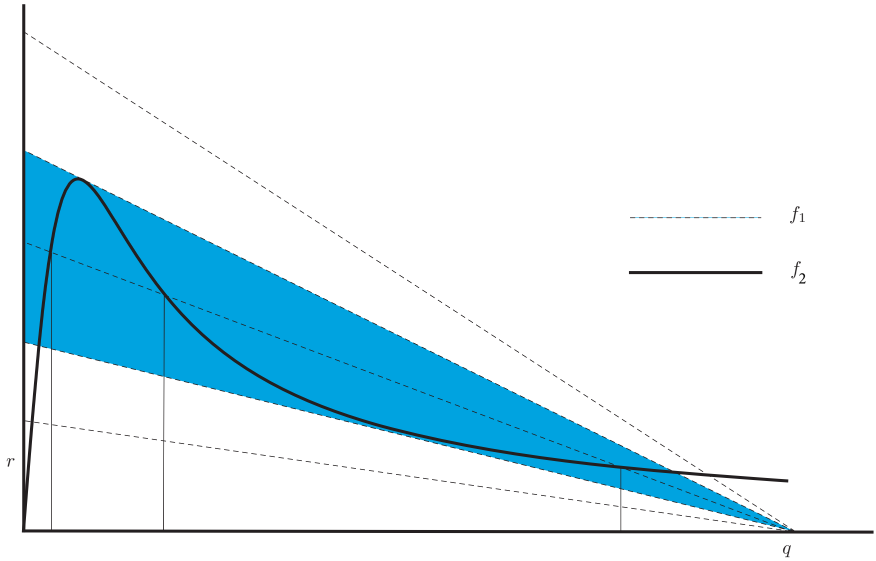
به غیر از $\tilde{u}=0$، باید جواب‌هایِ معادله‌یِ $f_1 = f_2$ یا محلِ تقاطعِ منحنی‌هایِ مربوط به این دو تابع را به دست آوریم، که $f_1(\tilde{u}) := r\left(1-\frac{\tilde{u}}{q}\right)$ و $f_2(\tilde{u}) := \frac{\tilde{u}}{1+\tilde{u}^2}$ هستند. $f_1(\tilde{u})$ تابعی خطی است که عرض از مبدا ِ آن $r$ و در $\tilde{u}=q$ صفر می‌شود. همان طور که در شکلِ (۱۳.۵) می‌بینیم با ثابت نگه داشتنِ $q$ و تغییرِ $r$ خطهایی با شیب‌هایِ مختلف خواهیم داشت که با خطوطِ نقطه‌چین نشان داده شده است. $f_2(\tilde{u})$ تابعی است که در مبدا صفر است، در $\tilde{u}\to\infty$ از سمتِ بالایِ محور به صفر میل می‌کند و یک بیشینه هم دارد. با تغییرِ $r$ شیبِ خطِ $f_1$ عوض می‌شود و برایِ $r$ هایِ بزرگ و $r$ هایِ کوچک یک نقطه‌یِ تقاطع برایِ دو تابع داریم و برایِ $q$ ثابت به ازایِ مقادیری از $r$ که خطها در ناحیه‌یِ آبی‌رنگ هستند، سه نقطه‌یِ تقاطع داریم . پس با در نظر گرفتنِ $\tilde{u}=0$ یا چهار نقطه‌یِ ثابت و یا دو نقطه‌یِ ثابت داریم. مرزِ ناحیه‌یِ آبی رنگ جایی است که تعدادِ نقاطِ ثابت از دو به چهار تبدیل می‌شود. در این مرز علاوه بر این‌که دو تابع با هم برابرند، شیبِ‌شان هم یکی است. یعنی در نقطه‌ای مثلِ $\tilde{u}=\alpha$

$$r\left(1-\frac{\alpha}{q}\right) = \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \tag{۳۳.۵}$$

$$-\frac{r}{q} = \frac{1-\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2} \tag{۳۴.۵}$$

که نتیجه می‌دهد

$$r = \frac{2\alpha^3}{(1+\alpha^2)^2} \tag{۳۵.۵}$$




شکل ۱۳.۵ $f_1$ و $f_2$ بر حسبِ $\tilde{u}$.

$$q = \frac{2\alpha^3}{\alpha^2 - 1} \tag{۳۶.۵}$$

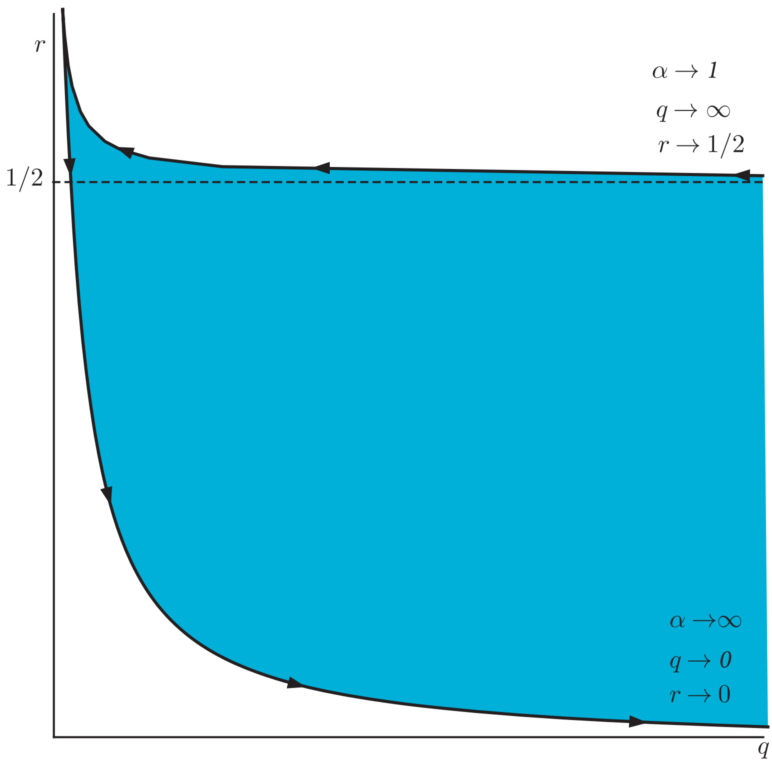
دو پارامترِ $r$ و $q$ مقادیری نامنفی هستند، پس حتماً $\alpha \geq 1$ است. در حدِ $\alpha \to 1^+$، $q \to \infty$ و $r \to 1/2$ و در حدِ $\alpha \to \infty$، $q \to \infty$ و $r \to 0$ می‌روند. با افزایشِ $\alpha$ نسبت به یک ابتدا $r$ صعودی است تا به یک بیشینه می‌رسد و سپس نزولی می‌شود تا به صفر برسد. $q$ هم در ناحیه‌ی $\alpha > 1$ تابعی نزولی از آن است. بیشینه‌ی $r$ به ازای $\alpha = \sqrt{3}$ است. در این نقطه خمِ $r$ بر حسبِ $q$ یک تیزی[۱] دارد. شکلِ (۱۴.۵) را ببینید.

ناحیه‌ی آبی‌رنگ در شکلِ (۱۴.۵) جایی است که چهار نقطه‌ی ثابت داریم و ناحیه‌ی سفیدرنگ جایی است که دو نقطه‌ی ثابت داریم. مرزِ این ناحیه جایی است که تعدادِ نقاطِ ثابت به طورِ ناپیوسته عوض می‌شود. جهتِ فلش رویِ مرز در جهتِ افزایشِ $\alpha$ است.

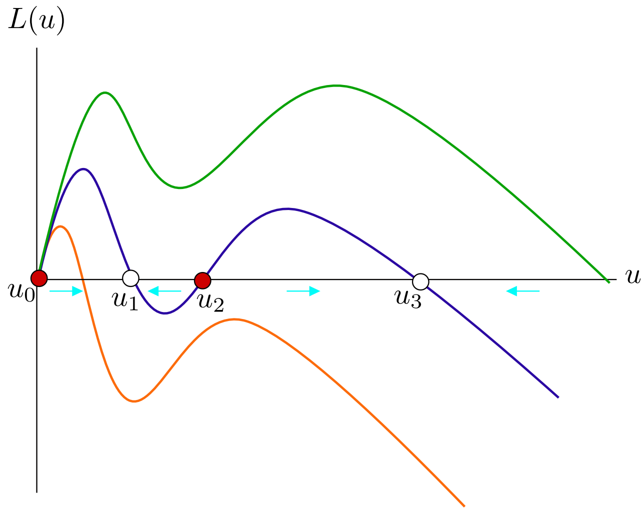
در موردِ تعدادِ نقاطِ ثابت و جاذب یا دافع بودنِ آن‌ها می‌توان مساله را از نگاهِ دیگری هم بررسی کرد. در مقایسه با (۱۳.۵) $L(u)$ عبارت است از

$$L(u) = ru\left(1 - \frac{u}{q}\right) - \frac{u^2}{1+u^2}. \tag{۳۷.۵}$$

[۱] Cusp




شکل ۱۴.۵ خمِ $r$ بر حسبِ $q$. جهتِ فلش جهتِ افزایشِ $\alpha$ از $1$ تا $\infty$ است. $q$ ابتدا کاهش و سپس افزایش پیدا می‌کند ولی $r$ ابتدا افزایش و سپس کاهش پیدا می‌کند.




شکل ۱۵.۵ $L(u)$ بر حسبِ $u$. بسته به مقادیرِ پارامترهای $r$ و $q$ تعدادِ نقاطِ ثابت می‌تواند بینِ دو تا چهار تا باشد. برای خمِ آبی‌رنگ نقاطِ $0 = u_0$ و $u_2$ نقاطِ دافع و $u_1$ و $u_3$ نقاطِ جاذب هستند.

منحنيِ $L(u)$ بر حسبِ $u$ در شکلِ (۱۵.۵) رسم شده است. بسته به مقادیرِ پارامترهای $r$ و $q$ تعدادِ نقاطِ ثابت می‌تواند بینِ دو تا چهار تا باشد. برای خمِ آبی‌رنگ نقاطِ $0 = u_0$ و $u_2$ نقاطِ دافع و $u_1$ و $u_3$ نقاطِ جاذب هستند.

## ۳.۵ مدل‌های دوگونه ذره: مدلِ شکار و شکارچی

مدلِ شکار و شکارچی[۱] یا مدلِ لُتکا–وُلتِرا[۲] یک مدلِ ساده‌ی دو گونه ذره است. این معادلات یک جفت معادله‌ی دیفرانسیلِ غیرخطی‌ِ مرتبه یک هستند که معمولاً برای توصیفِ تحولِ دینامیکی‌ِ سیستم‌های بیولوژیکی استفاده می‌شوند. در این مدل دو گونه‌ی شکار و شکارچی در تعامل هستند و جمعیت آن‌ها بر حسبِ زمان با این معادلات داده می‌شود. این معادلات حالتِ خاصی از مدل‌های پیچیده‌تری است که علاوه بر برهم‌کنش‌هایی که خواهیم دید، شاملِ رقابت برایِ استفاده از منابعِ محیطی، بیماری، مرگِ طبیعی و جهش است. در این مدل جمعیتِ شکار را با $A(t)$، و شکارچی را با $B(t)$ نمایش می‌دهیم. فرض‌های مدلِ ساده‌ی شکار و شکارچی

[۱] Predator–Prey Model
[۲] Lotka–Volterra

این‌ها هستند:

- در غیابِ شکارچی، جمعیتِ شکار بی حد و مرز زیاد می‌شود. نرخِ خالصِ تکثیرِ شکار را $a$ می‌گیریم. در واقعِ این نرخِ خالص را می‌توانیم اختلافِ نرخ تکثیر و نرخِ مرگِ طبیعی‌ِ شکار بگیریم. نرخِ تکثیرِ شکار را بزرگ‌تر از نرخِ مرگِ طبیعی‌اش می‌گیریم.
- اثرِ حضورِ شکارچی این است که باعثِ کم‌شدنِ جمعیتِ شکار می‌شود. هرچه تعدادِ شکار، $A$، و تعدادِ شکارچی، $B$، بیش‌تر باشد، تعدادِ شکاری که در واحدِ زمان رخ می‌دهد بیش‌تر است. این باعثِ کاهشِ جمعیتِ شکار با نرخِ $b$ و افزایشِ جمعیتِ شکارچی با نرخِ $c$ می‌شود.
- در صورتی که شکاری نباشد، جمعیتِ شکارچی به‌خاطرِ نبود ماده‌یِ غذایی کم می‌شود. نرخِ خالصِ کاهشِ جمعیت شکارچی را $d$ بگیرید. این نرخِ خالص را می‌توانیم اختلافِ نرخ تکثیر و نرخِ مرگِ طبیعی‌ِ شکار بگیریم. نرخِ تکثیرِ شکار را کوچک‌تر از نرخِ مرگ طبیعی‌اش می‌گیریم.

با در نظر گرفتنِ این‌ها معادلاتِ تحولِ جمعیتِ متوسطِ شکار و شکارچی عبارت است از

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = aA - bAB \tag{۳۸.۵}$$
$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = cAB - dB \tag{۳۹.۵}$$

ظاهراً در این مساله چهار نرخ وجود دارد که رفتارِ سیستم را کنترل می‌کند، ولی با بی‌بُعد کردنِ

$$u := \frac{cA}{d}, \qquad v := \frac{bB}{a} \tag{۴۰.۵}$$
$$\tau := at, \qquad \alpha := \frac{d}{a}, \tag{۴۱.۵}$$

می‌توان معادلات را به شکلِ ساده‌تری هم نوشت

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = u(1-v) \tag{۴۲.۵}$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} = \alpha v(u-1). \tag{۴۳.۵}$$

همان‌طور که در موردِ مدل تک‌گونه دیدیم بیایید ابتدا نقاطِ ثابت این معادلات، یعنی جایی که

سمتِ راستِ معادلاتِ بالا صفر می‌شود و جمعیت‌ها ثابت می‌شوند، را به دست آوریم. این معادلات دو نقطه‌یِ ثابت دارند، یکی $(u = 0, v = 0)$ و دیگری $(u = 1, v = 1)$. نقطه‌یِ $(u = 0, v = 0)$ یعنی حالتی که نه شکار است و نه شکارچی. حالتِ جالب‌تر نقطه‌یِ $(u = 1, v = 1)$ است. اگر سیستم را در حول و حوشِ این نقطه یعنی

$$u = 1 + \epsilon \tag{۴۴.۵}$$

$$v = 1 + \delta, \tag{۴۵.۵}$$

را رها کنیم، به طوری که $\epsilon, \delta \ll 1$ باشد، تا مرتبه‌یِ اولِ این پارامترها می‌رسیم به

$$\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}\tau} = -\delta(1 + \epsilon) \approx -\delta \tag{۴۶.۵}$$

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\tau} = \alpha\epsilon(1 + \delta) \approx \alpha\epsilon. \tag{۴۷.۵}$$

از ترکیبِ این دو معادله نتیجه می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}^2\epsilon}{\mathrm{d}\tau^2} \approx -\alpha\epsilon \tag{۴۸.۵}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\delta}{\mathrm{d}\tau^2} \approx -\alpha\delta. \tag{۴۹.۵}$$

جوابِ این معادلات دوره‌ای است، یعنی

$$u \approx 1 + c\cos(\tau\sqrt{\alpha} + \theta), \tag{۵۰.۵}$$

$$v \approx 1 + c\sin(\tau\sqrt{\alpha} + \theta). \tag{۵۱.۵}$$

در این صورت رفتارِ جمعیت‌های شکار و شکارچی بر حسبِ زمان دوره‌ای است و این توابع با هم اختلافِ فاز دارند. علاوه بر این در فضایِ $(uv)$ خم‌هایِ نزدیکِ به نقطه‌یِ ثابت، $(u = 1, v = 1)$، دایره‌هایی به دورِ این نقطه هستند. بنا بر این نقطه‌یِ ثابتی با مختصاتِ $A = \dfrac{d}{c}$ و $B = \dfrac{a}{b}$، وجود دارد که اگر سیستم از آن رها شود، جمعیت شکار و شکارچی ثابت می‌ماند. اگر سیستم کمی مختل شود، مثلاً شکارها بیش‌تر از این مقدارِ حدی باشند، با گذشتِ زمان به جایی می‌رسیم که شکارچی‌ها زیاد می‌شوند و برعکس. به طوری که سیستم حولِ نقطه‌یِ ثابت

حرکتی دوره‌ای دارد. به این ترتیب جمعیتِ شکار و شکارچی ضمنِ داشتنِ یک اختلافِ فاز حولِ نقطه‌یِ ثابت حرکتی دوره‌ای دارند. این را می‌توان به طورِ کمّی‌تر هم دید. با تقسیمِ دو معادله‌یِ (۴۲.۵) بر هم نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} &= \alpha\frac{v(u-1)}{u(1-v)}\\ \frac{\mathrm{d}v}{v} - \mathrm{d}v &= \alpha\,\mathrm{d}u - \alpha\frac{\mathrm{d}u}{u}\end{aligned} \tag{۵۲.۵}$$

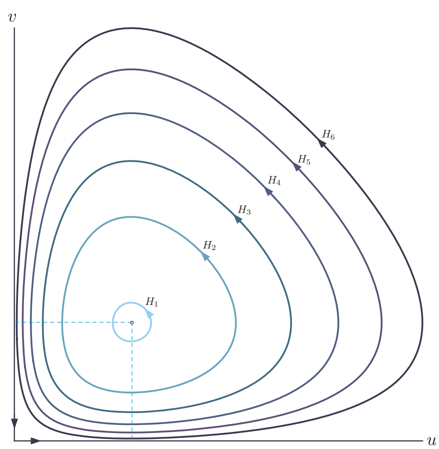
که با انتگرال‌گیری از آن می‌رسیم به

$$\alpha u + v - \ln(u^\alpha v) = H \tag{۵۳.۵}$$

که $H$ مقداری ثابت است که از شرایطِ اولیه به دست می‌آید

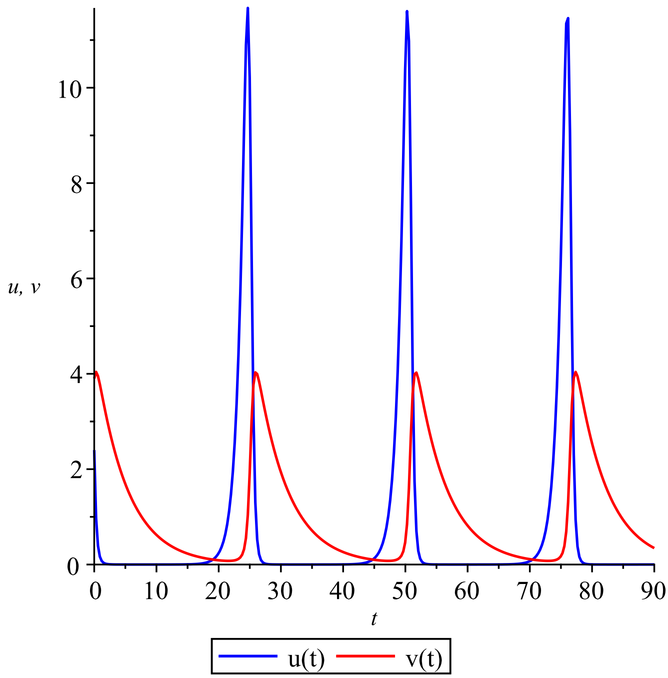
$$H = \alpha u_0 + v_0 - \ln(u_0^\alpha v_0). \tag{۵۴.۵}$$

هر چند با تغییرِ شرایطِ اولیه می‌توان مقدارِ $H$ را تغییر داد ولی به سادگی می‌توانیم نشان دهیم که $H_{\min} = 1 + \alpha$ است، که در نقطه‌یِ ثابتِ $(u = 1, v = 1)$ رخ می‌دهد.




شکل ۱۶.۵ $1 + \alpha = H_{\min} < H_1 < H_2 < H_3 < H_4 < H_5 < H_6$. خم‌هایِ $v$ بر حسبِ $u$ به ازایِ شرایطِ اولیه‌یِ متفاوت.

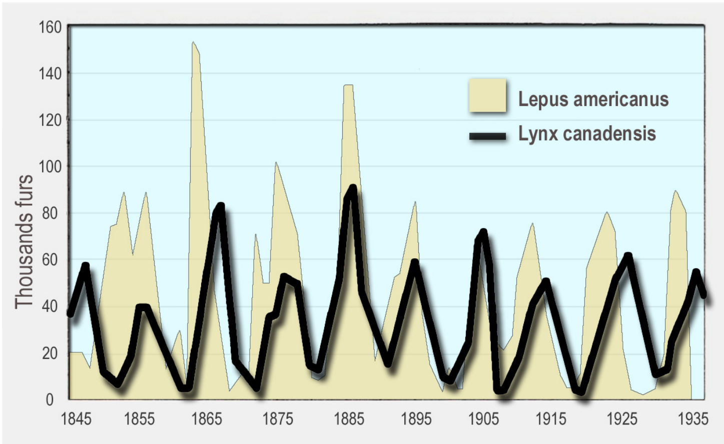
در شکلِ (۱۶.۵) خم‌های $v$ بر حسبِ $u$ به ازای شرایطِ اولیه‌ی متفاوت رسم شده‌اند. همان‌طور که می‌بینیم، این خم‌ها بسته و مسیرهایی دوره‌ای هستند. هر چند این مدل بسیار ساده است و خیلی از پیچیدگی‌های دنیای واقعی در آن لحاظ نشده است، می‌تواند نقطه‌ی شروعی برای فهمِ مدل‌های واقعی‌تر باشد. در شکلِ (۱۷.۵) خم‌های $v$ و $u$ را بر حسبِ زمان و به ازای $\alpha = 0.3$ کشیده‌ایم.




شکل ۱۷.۵ خم‌های $v$ و $u$ بر حسبِ زمان. در این‌جا $\alpha = 0.3$ گرفته‌ایم.

در شکلِ (۱۸.۵) جمعیتِ خرگوش‌های پاشنه‌برفی[۱] و سیاه‌گوش‌های کانادا[۲] بینِ سال‌های ۱۸۴۵ تا ۱۹۳۵ در پارکی در کانادا می‌بینید. در این شکل رفتار دوره‌ای و اختلافِ فازِ جمعیتِ این دو گونه قابلِ مشاهده است.

---
[۱] Snowshoe hare
[۲] Canada lynx




شکل ۱۸.۵ جمعیتِ خرگوش‌هایِ پاشنه‌برفی و سیاه‌گوش‌هایِ کانادا بینِ سال‌هایِ ۱۸۴۵ تا ۱۹۳۵ در پارکی در کانادا. en.wikipedia.org/wiki/Lotka-Volterra-equations

## ۴.۵ مدل‌هایِ چندگونه ذره: اپیدمی‌یِ یک بیماری

مدلی ساده برای بررسی‌یِ شیوعِ یک بیماری مدلِ SIR[۱] است. این مدل در اپیدمیولوژی برای محاسبه جمعیتِ افرادِ مستعدِ بیماری، افرادِ آلوده و بیمارهایِ بهبودیافته (یا در موردِ بیماری‌هایِ خیلی خطرناک و کشنده آن‌هایی که مرده‌اند) در یک جامعه استفاده می‌شود. لازم به ذکر است که این مدل برای بررسی‌یِ همه‌یِ بیماری‌ها مناسب نیست. در این مدل کسی که یک بار بیماری‌اش بهبود می‌یابد، مصونیتِ مادامُ العمر پیدا می‌کند. البته در موردِ بیماری‌هایِ خیلی خطرناک و کشنده این فرض نیست و بدیهی است که آن‌هایی که می‌میرند، از بیماری‌یِ مجدد مصون هستند. در این مدل فرض می‌شود گروهِ کوچکی از افرادِ آلوده واردِ جمعیتِ زیادی شوند، و ما می‌خواهیم توصیفی برایِ شیوعِ بیماری در آن جمعیت به عنوان تابعی از زمان به دست آوریم. در این مدل افراد به سه دسته تقسیم می‌شوند: افراد سالم که مستعد آلوده شدن به بیماری هستند که جمعیتِ آن‌ها را با $S$ نمایش می‌دهیم. افرادِ آلوده که جمعیتِ‌شان را با $I$ نمایش می‌دهیم و بالاخره بیمارهایِ بهبودیافته که جمعیتِ‌شان را با $R$ نشان می‌دهیم. مدل به گونه‌ای است که

[۱] Susceptible-Infected-Recovered

- جمعیتِ کل ثابت است.
- همه‌یِ افرادِ سالم تا بیمار نشده‌اند، مستعدِ بیمار شدن هستند و تنها راهی که یک فرد می‌تواند از گروهِ مستعدِ بیماری خارج شود، بیمارشدن است. چه بیمار بهبودی پیدا کند، که در آن‌صورت مصونیتِ مادامُ العمر پیدا می‌کند و چه آن‌که بمیرد، که در هر دو صورت به مجموعه‌یِ $R$ می‌پیوندد.
- سن، جنسیت، وضعیت اجتماعی و نژادی را به صورتِ گونه‌هایِ مختلف نشان نداده‌ایم و هیچ‌کدام بر احتمال ابتلا به بیماری تأثیر نمی‌گذارد.
- مصونیت ارثی وجود ندارد.
- اعضایِ جمعیت به صورتِ کاملاً همگن با هم اختلاط دارند.

نرخِ آلوده‌شدنِ یک فردِ مستعدِ بیماری را $\beta$ و نرخِ بهبودی یا مرگِ یک فردِ بیمار را $\gamma$ می‌گیریم.

$$S \xrightarrow{\beta} I \xrightarrow{\gamma} R. \tag{۵۵.۵}$$

با در نظر گرفتنِ این موارد معادلاتِ حاکم بر تحولِ زمانیِ جمعیتِ $S, I$ و $R$ به صورتِ زیر می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\beta SI, \tag{۵۶.۵}$$
$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \beta SI - \gamma I, \tag{۵۷.۵}$$
$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \gamma I. \tag{۵۸.۵}$$

با استفاده از این روابط، جمعیتِ کل $N = S + I + R$ ثابت است

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{۵۹.۵}$$

پس $N(t) = N_0 = S(0) + I(0)$ ثابت است. زمانِ $t = 0$ را وقتی گرفته‌ایم که هیچ بیماری هنوز مصونیت پیدا نکرده یا فوت نکرده است، یعنی $R(0) = 0$. در ابتدا

$$I'(0) = \left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \gamma I(0)\left(\frac{S(0)}{S_c} - 1\right) \tag{۶۰.۵}$$

که $S_c := \dfrac{\gamma}{\beta}$ است. در صورتی که $S(0) > S_c$ باشد $I'(0) > 0$ است و در صورتی که $S(0) < S_c$ باشد، $I'(0) < 0$ است. بنا بر این $S_C = \dfrac{\gamma}{\beta}$ معیاری از این است که جمعیت افرادِ مستعدِ بیماری چه‌قدر باشد تا شیوعِ بیماری رخ دهد ($I'(0) > 0$)، یا بیماری فروکش کند ($I'(0) < 0$). همان‌طور که از این روابط هم پیداست جمعیتِ افرادِ بیمار در ابتدا یعنی $I(0)$ اثری در شیوع یا عدمِ شیوعِ بیماری (یعنی علامتِ $I'(0)$) ندارد.

فرض کنید در ابتدا شیوع رخ دهد. آیا حتماً بیماری همه‌گیر است و بالاخره همه بیمار می‌شوند؟ با توجه به این‌که $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} < 0$ است، در هر حالت جمعیتِ افرادِ مستعد با گذشتِ زمان کم می‌شود، یعنی حتی اگر در ابتدا شرطِ شیوعِ بیماری برقرار باشد با گذشتِ زمان، بالاخره زمانی می‌رسد که شرطِ شیوع به هم می‌خورد. در $t_1$ یعنی زمانی که این شرط به هم می‌خورد، $I'(t_1) = 0$ می‌شود. در این زمان شیوعِ بیماری بیشینه است و پس از آن بیماری فروکش می‌کند.

برایِ یافتنِ پاسخِ کمّی معادله‌یِ ۵۶.۵ را بر ۵۷.۵ تقسیم می‌کنیم. در این صورت می‌رسیم به

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S} = \frac{S_c}{S} - 1. \qquad (۶۱.۵)$$

از انتگرال‌گیری‌یِ این رابطه نتیجه می‌شود

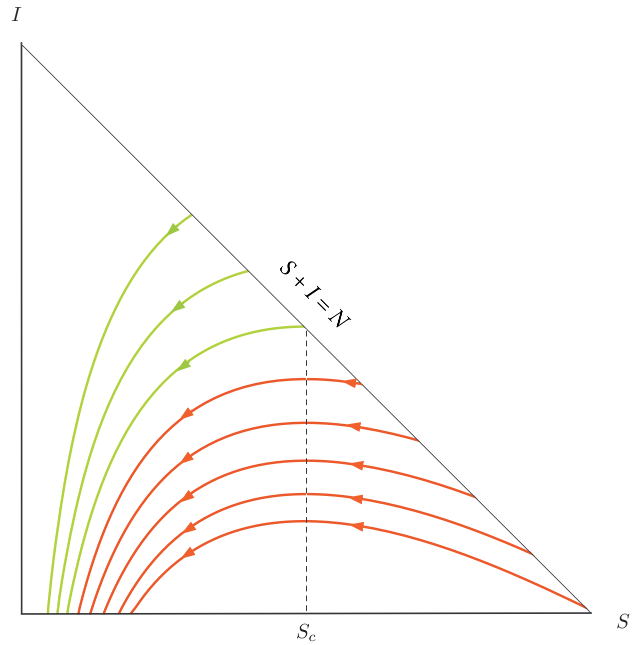
$$I + S - S_c \ln S = I(0) + S(0) - S_c \ln S(0), \qquad (۶۲.۵)$$

و جمعیتِ بیشینه‌یِ جایی است که $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S} = 0$ شود. در آن جا $S(t_1) = S_c$ است.

$$\begin{aligned} I_{\max} =& I(0) + S(0) - S_c - S_c \ln(\frac{S(0)}{S_c}) \\ =& N - S_c - S_c \ln(\frac{S(0)}{S_c}). \end{aligned} \qquad (۶۳.۵)$$

با داشتنِ $I_{\max}$ می‌شود برنامه‌ریزی کرد که تعدادِ بیشینه‌یِ افرادِ آلوده در شیوعِ یک بیماری‌یِ خاص چه‌قدر است و آیا امکاناتِ درمانی قادر به مواجهه با این حجم از بیمار در شیوعِ یک بیماری هست یا نه. وقتی بیماری ریشه‌کن شد، $I(S_\infty) = 0$ می‌شود. $S_\infty$ تعداد افرادی است که پس از ریشه‌کن شدنِ بیماری هنوز آلوده نشده‌اند.

در شکلِ (۱۹.۵) خم‌هایِ $I$ برحسبِ $S$ برایِ $S_c$ و جمعیتِ کلِ معین و شرایطِ اولیه‌یِ متفاوت رسم شده‌اند. فلش‌ها جهت زمان را نشان می‌دهند. چون جمعیتِ کلِ $S_0 + I_0 = N$




شکل ۱۹.۵ خم‌هایِ $I$ برحسبِ $S$ برایِ $S_c$ِ و جمعیتِ کلِ معین و شرایطِ اولیه‌یِ متفاوت رسم شده‌اند. خم‌هایِ قرمزرنگ مربوط به مواردی است که شیوع اتفاق می‌اُفتد و خم‌هایِ سبزرنگ مربوط به آن‌هایی هستند که شیوع رخ نمی‌دهد. فلش‌ها جهتِ زمان را نشان می‌دهند.

معین است، همه‌یِ خم‌ها از خطِ $S+I=N$ شروع می‌شوند. خم‌هایِ قرمزرنگ مربوط به مواردی است که شیوع اتفاق می‌اُفتد و خم‌هایِ سبزرنگ مربوط به آن‌هایی هستند که شیوع رخ نمی‌دهد.

اگر معادله‌یِ ۵۸.۵ را بر ۵۶.۵ تقسیم کنیم می‌رسیم به

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}S}=-\frac{S_c}{S}, \tag{۶۴.۵}$$

که جوابش

$$S=S_0\mathrm{e}^{-\dfrac{R}{S_c}} \tag{۶۵.۵}$$

است.

معادلاتِ ۵۶.۵–۵۸.۵ را به روشِ عددی هم می‌توان حل کرد. حلِ عددیِ این معادلات را در شکلِ ۲۰.۵ می‌بینید. در این‌جا فرض‌شده

$$\frac{S(0)}{N}=0.99,\qquad \frac{I(0)}{N}=0.01\qquad \frac{R(0)}{N}=0 \tag{۶۶.۵}$$

$$\beta=0.2,\qquad \gamma=0.1, \tag{۶۷.۵}$$

در شکلِ ۲۱.۵ مقایسه داده‌هایِ تجربی و محاسباتِ نظری را آورده‌ایم. مدلِ SIR و تعمیم‌هایی از آن برایِ انواعِ بیماری‌ها از جمله کوویدِ ۱۹ استفاده شده است. یکی از آن‌ها SIR-X model است.

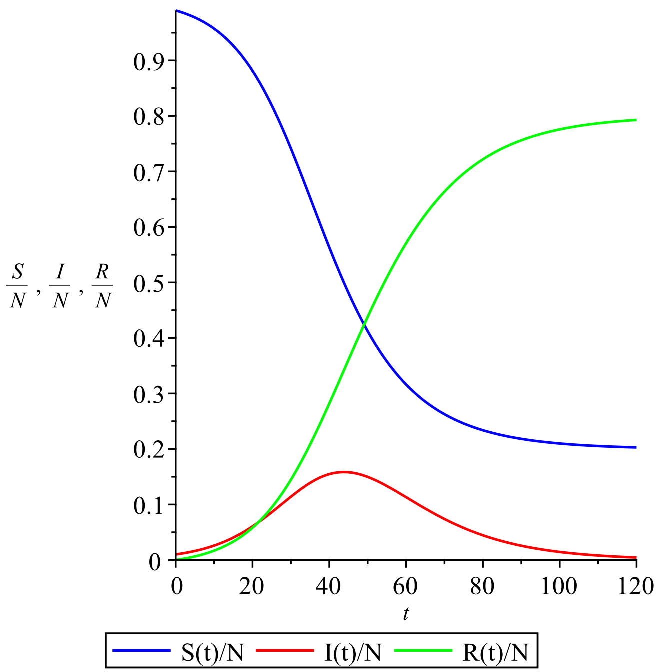
### ۱.۴.۵ فاکتورِ $\mathcal{R}_0$

تعدادِ بیمارانِ آلوده در زمانِ $\delta t$ به ازایِ یک بیمارِ آلوده یعنی $I=1$ عبارت است از

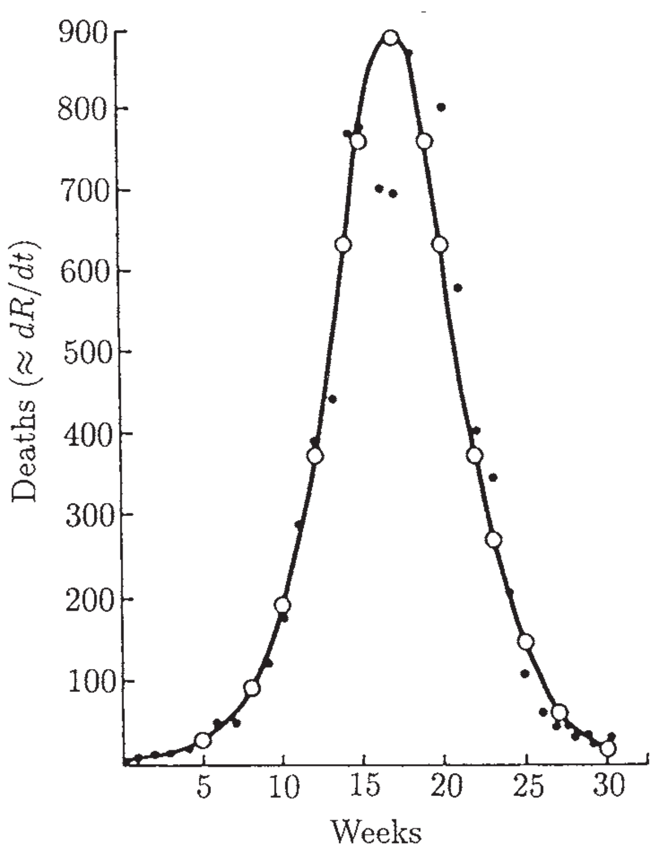
$$\delta I=\beta S\delta t-\gamma\delta t, \tag{۶۸.۵}$$

است. بخشِ اول یعنی $\beta S\delta t$ تعدادی هستند که در زمانِ $\delta t$ آلوده می‌شوند و بخشِ دوم

$$\delta R=\gamma\delta t, \tag{۶۹.۵}$$


0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
$\frac{S}{N}, \frac{I}{N}, \frac{R}{N}$
0
20
40
60
80
100
120
t
S(t)/N
I(t)/N
R(t)/N

شکل ۲۰.۵




شکل ۲۱.۵ همه‌گیری‌یِ طاعون در بمبئی ۱۹۰۵–۱۹۰۶. ● مربوط به داده‌هایِ تجربی و ○ مربوط به محاسباتِ نظری است. Mathematical Biology: I. An Introduction

تعدادی هستند که در زمانِ $\delta t$ مصونیت پیدا می‌کنند. با تغییرِ متغیرِ

$$I(t) =: \tilde{I}(t)\mathrm{e}^{-\gamma t} \tag{۷۰.۵}$$

معادله‌یِ ۵۷.۵ به صورتِ زیر در می‌آید

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{I}}{\mathrm{d}t} = \beta S\tilde{I}. \tag{۷۱.۵}$$

از معادلاتِ بالا نتیجه می‌شود که از طرفی جمعیتِ آلوده به طور نمایی با زمان مشخصه‌یِ $\gamma^{-1}$ کم می‌شود و از طرف دیگر یک زمانِ مشخصه‌یِ $\beta^{-1}$ هم در ۷۱.۵ هست که باعثِ افزایش جمعیتِ آلوده می‌شود. مثلاً برایِ بیماری‌یِ کوویدِ ۱۹ زمانِ متوسطِ بیمار شدن در تماسِ با فردِ آلود ممکن است از مرتبه‌یِ دقیقه و زمانِ متوسطِ بیماری تا بهبودی یا مرگ از مرتبه‌یِ هفته باشد. پس معقول است که زمانِ متوسطِ آلوده‌بودن را $\gamma^{-1}$ بگیریم. در این‌صورت متوسطِ افرادی که در این مدت توسطِ یک نفر آلوده بیمار می‌شوند وقتی که همه‌یِ جمعیت مستعدِ بیماری هستند

$$\beta S\delta t \approx \mathcal{R}_0, \tag{۷۲.۵}$$

است که $\mathcal{R}_0 := \dfrac{\beta N}{\gamma}$ است. این پارامترِ میزانِ تکثیرِ آلودگی‌یِ پایه[۱] یا آن‌چنان‌که گاهی نامیده می‌شود، فاکتورِ یا عاملِ $\mathcal{R}_0$ است. این پارامتر معرفِ متوسطِ تعدادِ افرادِ آلوده به ازای‌ِ یک نفر آلوده است وقتی که همه‌یِ جمعیت مستعدِ بیماری هستند. این عدد در واقع تعدادِ آلوده‌هایِ ثانویه است. این پارامتر معرفِ سرعتِ پخشِ بیماری در جامعه است. اگر $\mathcal{R}_0 > 1$ باشد، انتظار داریم همه‌گیری رخ دهد و اگر $\mathcal{R}_0 < 1$ باشد، انتظار داریم بیماری به تدریج محو شود. هرچه $\mathcal{R}_0$ بزرگ‌تر باشد، یک نفر تعدادِ بیش‌تری را آلوده می‌کند. در واقع هر چه تعدادِ تماسِ فردِ آلود با افرادِ مستعدِ بیماری و زمانِ آلوده‌بودن بیش‌تر باشد $\mathcal{R}_0$ بزرگ‌تر است. اگر بخشی از جمعیت مستعدِ بیماری و بخشی از آن ایمن شده باشند، شرطِ فروکش‌کردنِ بیماری

$$\mathcal{R}_0 \cdot \frac{S}{N} < 1, \tag{۷۳.۵}$$

است. با توجه به این‌که ما مدتِ بیماری را محدود می‌گیریم، پس از مدتی بخش از مجموعه‌یِ

[۱] Basic reproduction number

مستعدِ بیماری کم و به افرادِ ایمن‌شده اضافه می‌شود. در هر صورت در هر زمان اکثرِ جامعه جمعیت مستعدِ بیماری یا بخشی هستند که ایمن شده و افرادی که بیمارند بخشِ کوچکی از جامعه هستند، یعنی $R \ll S, I$ و $S + I \approx N$ است. بنا بر این حدِ فروکش‌کردنِ بیماری

$$\mathcal{R}_0 \cdot \frac{N-I}{N} \approx 1, \qquad \frac{I_c}{N} \approx 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}, \tag{۷۴.۵}$$

است. اگر برایِ یک بیماری مثلاً $\mathcal{R}_0 \approx 4$ باشد، باید جمعیتِ افرادِ ایمن‌شده به حدودِ $75\%$ برسد تا بگوییم بیماری فروکش می‌کند. به این نوع ایمنی، ایمنیِ جمعی یا ایمنیِ گله‌ای[۱] می‌گویند. هرچه‌قدر نسبتِ افرادِ ایمن در جامعه‌ای بیش‌تر باشد، احتمالِ تماسِ افرادِ مستعدِ بیماری با فردِ آلوده کم‌تر می‌شود و به فروکش‌کردنِ بیماری کمک می‌کند. راهِ مطمئن برایِ این‌که رسیدن به ایمنیِ جمعی استفاده از واکسیناسیون است. به این معنی که در موردِ مثالی که زدیم اگر با واکسیناسیون هم بتوانیم جمعیتِ بخشِ ایمنِ جامعه را به $75\%$ برسانیم، بیماری فروکش می‌کند. بعضی از افراد به دلایلِ پزشکی مانندِ نقصِ سیستمِ ایمنی یا سرکوبِ سیستمِ ایمنیِ بدن نمی‌توانند ایمن شوند. مثلاً در موردِ بیماریِ کوویدِ ۱۹ ظاهراً اطفال و زنانِ باردار و بعضی بیماری‌هایِ خاص نمی‌توانند واکسیه شوند. برایِ این گروه ایمنیِ جمعی یک روشِ مهمِ محافظت است. پس از رسیدن به آستانه‌یِ ایمنیِ جمعی بیماری به‌تدریج از بین می‌رود. این نتایج بر این فرض بنا شده بود که جمعیت‌ها یک‌دست هستند، به این معنی که هر فرد از آن جامعه با هر فرد دیگری در تماس است، درحالی که در دنیایِ واقعی جوامع به صورت شبکه‌ایِ با هم ارتباط دارند که در آن افراد در دسته‌هایی دور هم جمع شده‌اند، به گونه ای که هر فرد با تعدادِ معدودی فردِ دیگر ارتباط دارد. در این شبکه‌ها، سرایتِ بیماری فقط بین افرادی که به یکدیگر نزدیک هستند، رخ می‌دهد. علاوه بر این بعضی اوقات و در بعضی بخش‌هایِ جامعه مواردِ ایمنی مثلِ قرنطینه بیش‌تر رعایت می‌شود که باعث می‌شود این فاکتورِ $\mathcal{R}_0$ می‌تواند متفاوت باشد و به زمان و مکان بستگی داشته باشد.

---
[۱] Herd immunity

جدول ۱.۵ فاکتورِ $\mathcal{R}_0$ و ایمنیِ جمعی برایِ دسته‌ای از بیماری‌هایِ شناخته‌شده
https://en.wikipedia.org/wiki/Herd_immunity

| بیماری | $\mathcal{R}_0$ | درصدِ افرادِ ایمن برایِ رسیدن به ایمنیِ جمعی |
|---|---|---|
| سرخک | $12-18$ | $92\%-95\%$ |
| آبله | $5-7$ | $80\%-86\%$ |
| کووید ۱۹ | $2.5-4$ | $60\%-75\%$ |
| آنفولاَنزا | $1.5-1.8$ | $33\%-44\%$ |

## مسائل

۱.۵ اَثرِ آلی[۱]ــ این اثر به نامِ واردرِ کلاید آلی[۲] است و به این معناست که برایِ خیلی از موجودات، رشدِ موثر یا آهنگ رشد بر جمعیت یعنی $\frac{\dot{N}}{N}$ نه در $N$هایِ خیلی بزرگ و نه در $N$هایِ خیلی کوچک اتفاق می‌اُفتد. در واقع برایِ $N$ هایِ خیلی بزرگ رقابت برایِ غذا و منابعِ دیگر رشدِ موثر را سخت می‌کند. علاوه بر این برایِ $N$ هایِ خیلی کوچک هم ادامه حیات سخت است. بنا بر این رشدِ موثر به ازای مقداری متوسط برایِ $N$ رخ می‌دهد. مثالِ زیر را در نظر بگیرید.

الف_ معادله‌یِ

$$\frac{\dot{N}}{N}=F(N)=r-a(N-b)^2$$

را در نظر بگیرید. $r$، $a$ و $b$ ثابت‌های مدل و مثبت هستند. $F(N)$ به ازایِ چه‌مقداری از $N$ بیشینه می‌شود؟ مقدارِ بیشینه چه‌قدر است؟ رشدِ موثر به ازایِ چه مقادیری مثبت و به ازایِ چه مقادیری منفی است؟

ب_ با مطالعه‌یِ تابعِ $NF(N)$ نقاطِ ثابت را به دست آورید. به ازایِ چه مقادیری از ثابت‌هایِ مدل، پای‌دار و تحتِ چه شرایطی ناپای‌دار هستند؟

ج_ آیا این مدل به ازایِ شرطِ اولیه‌یِ یکسان با مدلِ لجستیک فرقِ کیفی دارد؟ یا نتایج

[۱] The Allee effect
[۲] Warder Clyde Allee

هر دو به ازای شرطِ اولیه‌ی یکسان به‌طورِ کیفی یک‌سان است؟

۲.۵ در مساله‌ی شکار و شکارچی به ثابتِ

$$H = \alpha u_0 + v_0 - \ln(u_0^\alpha v_0).$$

رسیدیم که به شرایطِ اولیه بستگی دارد. مقدارِ کمینه آن را به دست آورید و نشان دهید

$$H_{\min} = 1 + \alpha$$

است.

۳.۵ مدل بسیار ساده‌ای برای ماهی‌گیری مدلِ زیر است. اگر ماهی‌گیران نباشند یا ماهی نگیرند جمعیتِ ماهی‌ها با معادله‌ای از نوعِ معادله‌ی لجستیک رشد می‌کند. ($A, N_c > 0$). فرض کنید ماهی‌گیرها با نرخِ ثابتِ $B > 0$ و مستقل از تعدادِ ماهی‌ها هر روز همان تعدادی ماهی صید می کنند. در این‌صورت

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = AN(1 - \frac{N}{N_c}) - B.$$

الف) این معادلات را با انتخابِ پارامترهای مناسب به شکلِ زیر بی‌بُعد کنید.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = x(1 - x) - b.$$

ب ــ بر حسبِ مقادیرِ مختلفِ $b$ چه اتفاق‌هایی روی خواهد داد؟ نتایج خود را توضیح دهید.

۴.۵ مدلی ساده برای رشدِ تومورهای سرطانی مدلِ زیر است

$$\dot{N} = F(N) = -aN \ln(N/N_c)$$

که $N$ تعدادِ سلول‌های تومور است و $a, N_c > 0$ پارامترهای مدل هستند. تا زمانی که N خیلی کوچک نباشد، پیش بینی‌های این مدلِ ساده با داده‌های تجربی‌ِ مربوط به تومورها به طرز شگفت آوری مطابقت دارد.

الف_ نقاطِ ثابت در این مدل را به دست آورید.

ب_ به طورِ کیفی نمودارِ $F(N)$ بر حسبِ $N$ را رسم کنید. در موردِ پایداری یا ناپایداریِ این نقاط چه می‌توانید بگویید؟ چرا؟

ج_ چه تعبیرِ فیزیکی‌ای برای پارامترهای $a$ و $N_c$ دارید؟

د_ به طورِ کیفی نمودارِ $N(t)$ بر حسبِ زمان را برای مقادیر اولیه‌ی مختلف رسم کنید.

۵.۵ یک مدلِ دیگر برای رشدِ تومورهای سرطانی مدلِ زیر است

$$\dot{N} = F(N) = aN - bN\ln(N/N_1)$$

که $N$ تعدادِ سلول‌های تومور است و $a, b, N_1 > 0$ پارامترهای مدل هستند. این معادله معادله‌ی گُمپرتز[1] است.

الف_ نقاطِ ثابت در این مدل را به دست آورید.

ب_ به طورِ کیفی نمودارِ $F(N)$ بر حسبِ $N$ را رسم کنید. در موردِ پایداری یا ناپایداریِ این نقاط چه می‌توانید بگویید؟ چرا؟

ج_ $N(t)$ بر حسبِ زمان را به دست آورید.

۶.۵ مدلی ساده برای لیزر به صورتِ زیر است. $N(t)$ را تعدادِ اتم‌های برانگیخته و $n(t)$ را تعدادِ فوتون‌های تحریکِ القایی در زمانِ $t$ بگیرید. در معادله‌ی تحولِ زمانیِ $n(t)$ دو جمله‌ی چشمه و چاه دارد. در جمله‌ی چشمه $G$ نرخِ رشدِ تعدادِ فوتون‌های ناشی از تحریکِ القایی و در جمله‌ی چاه $k$ نرخِ فرارِ فوتون‌های ناشی از تحریکِ القایی از دیواره‌های لیزر است. در این صورت

$$\dot{n} = GnN - kn$$

است.

الف_ اگر تعدادِ اتم‌های برانگیخته در زمانِ $t = 0$ را $N_0$ بگیریم

$$N = N_0 - \alpha n$$

[1] Gompertz equation

که $\alpha$ احتمالِ برگشتِ اتم‌های برانگیخته به حالتِ پایه است. با استفاده از این معادله، معادله‌یِ تحولِ تعدادِ فوتون‌هایِ القایی را به صورتِ

$$\dot{n} = F(n)$$

بنویسید. با رسمِ نمودارِ $F(n)$ بر حسبِ $n$ نقاطِ ثابتِ این معادله که آن را با $n^*$ نمایش می‌دهید را به ازایِ مقادیرِ مختلفی از $N_0G/k$ که کمیتی بی‌بعد است، به دست آورید. به ازایِ چه مقادیری از $N_0G/k$ این نقاط جاذب یا دافع‌اند؟

ب_ پارامترهایِ $G$ و $k$ را معین بگیرید. نمودارِ $n^*$ بر حسبِ $N_0$ را به طورِ کیفی رسم کنید.

۷.۵ مدلی پیش‌رفته‌تر برایِ لیزر

$$\dot{n} = GnN - kn, \tag{۷۵.۵}$$

$$\dot{N} = -GnN - fN + p, \tag{۷۶.۵}$$

است، که $N(t)$ تعدادِ اتم‌هایِ برانگیخته و $n(t)$ تعدادِ فوتون‌هایِ تحریکِ القایی در زمانِ $t$ هستند. $G$ نرخِ گسیلِ تعدادِ فوتون‌هایِ ناشی از تحریکِ القایی و $k$ نرخِ فرارِ فوتون‌هایِ ناشی از تحریکِ القایی از دیواره‌هایِ لیزر و $p$ قدرت پُمپِ لیزر است. همه‌یِ پارامترها جز $p$ مثبت هستند. $p$ هم می‌تواند مثبت و هم منفی باشد.

الف_ معادلاتِ ۷۵.۵ و ۷۶.۵ را بی‌بُعد کنید.

ب_ نقاطِ ثابت و نوعِ آن‌ها را به دست آورید.

ج_ نمایِ فاز را به دست آورید.

۸.۵ تعدادی اتمی را در نظر بگیرید که برایِ سادگی فرض می‌کنیم هر کدام از آن‌ها فقط دو حالتِ انرژیِ پایه‌یِ $E_1$ و برانگیخته‌یِ $E_2 > E_1$ دارند. اتمی که در حالتِ پایه است می‌تواند با جذبِ فوتونی با بسامدِ $\omega = \dfrac{E_2 - E_1}{\hbar}$ از حالتِ پایه به حالتِ برانگیخته برود. فرض کنید این اتم در حضورِ یک گازِ فوتونی است. تعدادِ فوتون‌هایِ با انرژیِ $\hbar\omega$ را $n_p$ بگیرید. تعدادِ اتم‌ها در حالتِ پایه را $N_1$ و تعدادِ اتم‌ها در حالتِ برانگیخته را $N_2$ بگیرید. چند حالت می‌تواند رخ دهد.

- اتمی که در حالتِ برانگیخته است با نرخِ $A_{21}$ فوتون تابش می‌کند و به حالتِ پایه می‌رود. این فرآیندِ گسیلِ خودبه‌خود است.
- اتمی که در حالتِ برانگیخته است، در حضورِ فوتونی با بسامدِ $\omega$ که در محیط است با نرخِ $B_{21}$ فوتون تابش می‌کند و به حالتِ پایه می‌رود. این فرآیندِ گسیلِ القایی است.
- اتمی که در حالتِ پایه است، در حضورِ فوتونی با بسامدِ $\omega$ که در محیط است با نرخِ $B_{12}$ فوتون جذب می‌کند و به حالتِ برانگیخته می‌رود. این فرآیندِ جذبِ است.

الف ـ معادله‌یِ تحولِ $N_1$ و $N_2$ را بنویسید.
ب ـ در حالتِ پایا $\dfrac{N_1}{N_2}$ را بر حسبِ $B_{21}, B_{12}, n_p$ و $A_{12}$ به دست آورید.

۹.۵ از تغییرِ متغیرِ

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} := I(t), \qquad (۷۷.۵)$$

در معادلاتِ حاکم بر تحولِ زمانیِ جمعیتِ $I, S$ و $R$ در مدلِ SIR یعنی در معادلاتِ ۵۶.۵ تا ۵۸.۵ استفاده و معادلات را ساده و معادلاتِ ۶۵.۵ و ۶۲.۵ را به دست آورید.

۱۰.۵ سیستمی از دو گونه ذره‌یِ $A$ و $B$ را در نظر بگیرید که در مجاورت هم با نرخ‌های دادشده یک‌دیگر را نابود می‌کنند

$$AA \to \emptyset, \qquad \lambda, \qquad (۷۸.۵)$$

$$AB \to \emptyset, \qquad \eta, \qquad (۷۹.۵)$$

$$BB \to \emptyset, \qquad \lambda. \qquad (۸۰.۵)$$

الف ـ معادله‌یِ تحولِ هر کدام از گونه‌ها را بنویسید. تعدادِ ذراتِ گونه‌ها را با $N_A$ و $N_B$ نمایش دهید. پس از زمانِ طولانی تعدادِ هر کدام از ذرات چه‌قدر است؟
ب ـ با تغییرِ متغیرهایِ

$$\tau := \eta t, \qquad (۸۱.۵)$$

$$\alpha := \frac{\lambda}{\eta}, \tag{۸۲.۵}$$

معادله‌های تحولِ زمانی را بی‌بُعد کنید. به جایِ دو متغیرِ $N_A$ و $N_B$ هم از متغیرهایِ $u := \frac{N_A}{N_B}$ و $v := N_B$ استفاده کنید. معادله‌یِ $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$ را به دست آورده و آن را حل کنید.

۱۱.۵ نرخِ تولیدِ مثلِ خرگوش‌ها مثلِ جوندگان بسیار بالاست. فصل جفت‌گیری بیش‌ترِ خرگوش‌ها نه ماه از سال است. دورانِ بارداری برایِ آن‌ها معمولاً سی روز است و ممکن است در هر بارداری، یک تا دوازده بچه خرگوش به دنیا بیاید و چند روز بعد می‌توانند مجدداً باردار شوند. برایِ یک خرگوشِ ماده این عادی است که چندین بار در سال و به طورِ متوسط سه تا چهار بار باردار شود. محدودیتِ منابعِ غذایی و رقابت بر سرِ بقا مانعی برای تکثیرِ بدونِ حدّ و مرزِ حیوانات است. فرض کنید در ناحیه‌ای تعدادیِ گیاه‌خوارِ بومی‌یِ آن منطقه وجود دارند. تحولِ زمانی‌یِ تعدادِ متوسطِ این گیاه‌خواران که تعدادِشان در هر لحظه را با $S$ نشان می‌دهیم در معادله‌یِ لجستیک، ۱۰.۵ صدق می‌کند. تعدادی خرگوش را واردِ این محیط می‌کنیم. رقابت برایِ منابعِ غذایی بینِ خرگوش‌ها که تعدادِشان در هر لحظه را با $R$ نشان می‌دهیم و گیاه‌خوارانِ بومی‌یِ آن منطقه معادله‌یِ لجستیک را به هم می‌زند. نشان دهید رقابتِ این دو نوع موجود باعث می‌شود معادله‌یِ تحولِ جمعیتِ آن‌ها به شکلِ زیر دربیاید

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \alpha S(1 - \frac{S}{S_c}) - \beta SR, \tag{۸۳.۵}$$

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \lambda R - \eta SR. \tag{۸۴.۵}$$

در این‌جا ما از اثرِ خرگوش‌ها در محدود کردنِ جمعیتِ هم‌نوع‌هایِ‌شان چشم‌پوشی کرده‌ایم. در واقع مثلِ این است که $R_c$ در معادله‌یِ لجستیکِ خرگوش‌ها را بی‌نهایت گرفته باشیم. با تغییرِ متغیرِ

$$\tau := At, \tag{۸۵.۵}$$

$$u := BS, \tag{۸۶.۵}$$

$$v := CR, \tag{۸۷.۵}$$

معادله‌های تحولِ این موجودات را به شکلِ بی‌بُعدشده‌ی زیر درآورید

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = u(1-u-v), \tag{۸۸.۵}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} = av(1-bu). \tag{۸۹.۵}$$

پارامترهای تغییرِ متغیر چه هستند؟ این مدل چند نقطه‌ی ثابت دارد؟ پای‌دار یا ناپای‌دارند؟

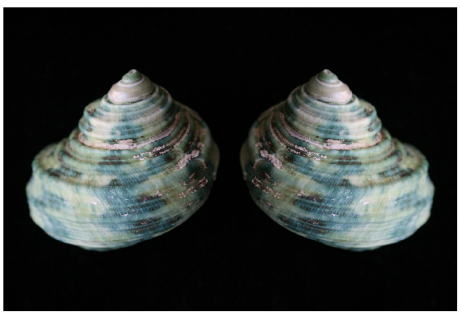
۱۲.۵ با احتمالِ $99.99\%$ شما هم مثلِ بقیه‌ی انسان‌ها قلب‌تان سمتِ چپِ بدن‌تان است. تقریباً از هر ده‌هزار نفر یک نفر اندام‌های داخلی‌اش برعکسِ بقیه است، یعنی مثلاً قلبش به جای سمتِ چپ، سمتِ راست است. این در حالی است که کبد هم به جای سمتِ راست، در سمت چپِ بدنش است. اکثر قریب به اتفاقِ گونه‌های شناخته‌شده‌ی حلزون‌ها صدف‌هایی دارند که راست‌گرد هستند. عکسِ ۲۲.۵ را ببینید. همان‌طور که در عکس هم می‌بینید با چرخش دست راست روی صدفِ حلزون به بالا می‌رویم. من به حلزونِ چپ‌گرد دست‌رسی نداشتم. برای همین با استفاده از نرم‌افزار و تبدیلِ آینه‌ای عکسی مربوط به یک حلزونِ چپ‌گردِ خیالی را ساختم. عکسِ ۲۳.۵ را ببینید. بیش‌ترِ حلزون‌ها نر–ماده[۱] یعنی هم نر و هم ماده هستند. تعدادِ نوعِ راست‌گرد را با $R$ و تعدادِ نوعِ چپ‌گرد را با $L$ نمایش دهید. چند فرض در موردِ جفت‌گیری‌ی حلزون‌ها می‌کنیم:

- راست‌گرد یا چپ‌گرد بودن در انتخابِ جفت اثر ندارد.
- آهنگِ جفت‌گیری را $m$ بگیرید.
- حلزون در هر تخم‌گذاری $b$ تخم می‌گذارد.
- از جفت‌گیری‌ی حلزون‌های راست‌گرد، حلزون‌های راست‌گرد حاصل می‌شوند و از جفت‌گیری‌ی حلزون‌های چپ‌گرد، حلزون‌های چپ‌گرد حاصل می‌شوند. از جفت‌گیری‌ی حلزونِ راست‌گرد با حلزونِ چپ‌گرد با احتمالِ برابر حلزون‌های راست‌گرد و چپ‌گرد حاصل می‌شوند

الف– هر حلزونِ راست‌گرد با چه احتمالی با یک حلزونِ چپ‌گرد و با چه احتمالی با یک حلزونِ راست‌گرد جفت‌گیری می‌کند؟

---
[۱] Hermaphrodites

شکل ۲۲.۵  صدفِ تعدادی حلزون. همان‌طور که می‌بینید این‌ها راست‌گرد هستند یعنی با چرخشِ راست‌گرد رویِ صدفِ حلزون بالا می‌رویم. این‌ها بخشِ کوچکی است از آن‌چه هم‌سرم سال‌هایِ پیش جمع‌آوری کرده بود. همه‌یِ صدف‌ها راست‌گرد بودند. عکس‌ها را خودم گرفته‌ام. شکلِ مسئله‌یِ ۱۰.۵.



شکل ۲۳.۵  به حلزونِ چپ‌گرد دست‌رسی نداشتم. برایِ همین با استفاده از نرم‌افزار و تبدیلِ آیینه‌ای عکسی مربوط به یک حلزونِ چپ‌گردِ خیالی را ساختم. شکلِ مسئله‌یِ ۱۰.۵.

ب_ نشان دهید معادله‌ی تحولِ زمانیِ $R$ و $L$ به صورتِ زیر است

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \frac{mbR^2}{R+L} + \frac{mbLR}{2(R+L)}, \tag{۹۰.۵}$$

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{mbL^2}{R+L} + \frac{mbLR}{2(R+L)}. \tag{۹۱.۵}$$

ج_ نسبت دو نوع حلزون را $X := \dfrac{L}{R}$ بگیرید. نشان دهید معادله‌ی تحولِ زمانیِ $X$ به صورتِ زیر است

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \frac{mbX(X-1)}{(X+1)}. \tag{۹۲.۵}$$

د_ نقاطِ ثابتِ این مدل را به دست آورید. کدام پای‌دار و کدام ناپای‌دار هستند؟ پس از زمانِ طولانی انتظار دارید $X$ چه باشد؟

۱۳.۵ دو گونه‌ی خرگوش با تعدادِ $N_a$ و روباه با تعدادِ $N_b$ را به عنوانِ یک دستگاهِ شکار و شکارچی در نظر بگیرید. ازدیادِ جمعیتِ خرگوش‌ها متناسب با جمعیتِ خودشان و کم شدنِ جمعیتِشان متناسب با جمعیتِ خودشان و جمعیتِ روباه‌هاست. کاهشِ جمعیتِ روباه‌ها متناسب با جمعیتِ خودشان و ازدیادِ جمعیتِشان متناسب با جمعیتِ خودشان و جمعیتِ خرگوش‌هاست. همه‌ی پارامترهای $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ مثبت هستند.

$$\frac{\mathrm{d}N_a}{\mathrm{d}t} = N_A(\alpha - \beta N_b) \tag{۹۳.۵}$$

$$\frac{\mathrm{d}N_b}{\mathrm{d}t} = N_b(\gamma N_a - \delta). \tag{۹۴.۵}$$

الف_ این معادلات را با انتخابِ پارامترهای مناسب بی‌بُعد کنید.

ب_ نقاطِ ثابتِ این دستگاهِ دینامیکی را پیدا کنید.

ج_ رفتارِ سیستم در نزدیکیِ این نقاطِ ثابت چه‌گونه است؟

# ۶

# حرکتِ براونی و معادله‌یِ لانژون

## ۱.۶ حرکتِ براونی

یکی از ساده‌ترین مثال‌هایِ دستگاه‌هایِ غیرتعادلی حرکتِ براونی است. در حرکتِ براونی حرکت ذره‌ای بررسی می‌شود که تحتِ تاثیرِ نیرویی قرار دارد. بخشی از این نیرو نیروی اتلافی است و بخشِ دیگرِ آن که همراه با اُفت‌وخیز است نیرویی تصادفی است. در حرکتِ براونی ذره‌ای کوچک مثلاً گرده‌یِ یک گیاه در شاره‌ای غوطه‌ور است. معمولاً فرض می‌شود این نیروی ضربه تغییراتِ شدیدی در مدتِ مشاهده‌یِ حرکتِ ذره دارد. به زبانِ دیگر زمانِ مشخصه‌یِ برخوردها خیلی کوچک‌تر از زمان تغییراتِ سرعتِ ذره است. این ذره تحتِ تاثیرِ برخورد مولکول‌هایِ شاره حرکتی تصادفی دارد. معادله‌یِ حرکت ذره‌ای به جرمِ $m$ عبارت است از

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\gamma m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{F}_s(t) \tag{۱.۶}$$

که $\boldsymbol{v}$ سرعتِ ذره، $\gamma$ ضریبی مربوط به مقاومت در مقابلِ حرکت در شاره است و نیرویِ $\boldsymbol{F}_s(t)$ نیرویی تصادفی است. این معادله‌یِ لانژون[۱] است.

---

[۱] Langevin

## ۲.۶ معادله‌یِ لانژون

در این بخش به حلِ معادله‌یِ لانژون می‌پردازیم. برایِ سادگی خود را به مساله‌یِ یک‌بعدی محدود می‌کنیم. تعمیمِ مساله به سه‌بُعد خیلی سخت نیست. نیرویِ تصادفی ناشی از برخوردِ مولکولهایِ شاره با ذره است و ابعادِ ذره بسیار بزرگ‌تر از مولکولهاست و با در نظر گرفتنِ این‌که زمانِ برخوردها را بسیار کوچک و تعدادِ برخوردها در مدتِ مشاهده‌یِ حرکتِ ذره بسیار زیاد است، فرض می‌کنیم متوسطِ آنسامبلی‌یِ این نیرویِ تصادفی صفر و ممان دومِ نیرو در دو زمان مختلف به صورتِ زیر هستند

$$\langle F_s(t)\rangle = 0, \tag{۲.۶}$$

$$\langle F_s(t)F_s(t')\rangle = \Gamma\delta(t-t'). \tag{۳.۶}$$

تابع دلتا در زمان نشان می‌دهد که هیچ هم‌بستگی‌ای بین ضربه‌هایی که در فاصله‌هایِ زمانی‌یِ $(t, t+\mathrm{d}t)$ و $(t', t'+\mathrm{d}t')$ به ذره وارد می‌شود وجود ندارد. $\Gamma$ معیاری از قدرتِ نیرویِ تصادفی است. انشتین برایِ اولین بار در سالِ ۱۹۰۵ توصیفی کمّی برایِ این پدیده ارائه داد. معادله‌یِ ۱.۶ در یک بُعد را می‌توانیم به شکلِ زیر بنویسیم

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \gamma v = \zeta(t), \tag{۴.۶}$$

که $\zeta(t) := \frac{F_s(t)}{m}$ است. از این معادله دیده می‌شود که $v(t+\delta t)$ به سرعتِ ذره $v(t)$ و نیرویِ تصادفی $F_s(t)$ در زمانِ $t$ و طبیعتاً قبل‌تر از آن بستگی دارد. اگر جمله‌یِ تصادفی‌یِ $F_s(t)$ سمتِ راستِ معادله‌یِ ۱.۶ نبود، این معادله یک معادله‌یِ تعینی[۱] بود. اما حالا به علتِ حضورِ این جمله این معادله یک معادله‌یِ دیفرانسیلِ تصادفی است، که با تغییرِ متغیرِ $u(t) := v(t)\exp(\gamma t)$ شکلِ آن ساده‌تر می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = (\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \gamma v)\mathrm{e}^{\gamma t} = \zeta(t)\mathrm{e}^{\gamma t}. \tag{۵.۶}$$

حلِ این معادله‌یِ اخیر ساده‌تر است.

$$u(t) = u(0) + \int_0^t \mathrm{d}t'\,\zeta(t')\,\mathrm{e}^{\gamma t'}, \tag{۶.۶}$$

---

[۱] deterministic

که با جای‌گذاری بر حسبِ $v(t)$ تبدیل می‌شود به

$$v(t) = v(0)\mathrm{e}^{-\gamma t} + \int_0^t \mathrm{d}t' \, \frac{F_s(t')}{m} \, \mathrm{e}^{\gamma(t'-t)}. \tag{۷.۶}$$

حالا که معادله‌یِ دیفرانسیلِ تصادفی‌یِ ۱.۶ را حل کرده‌ایم، می‌بینیم جوابش به دو بخشِ تعینی و تصادفی تقسیم شده است. جمله‌یِ اولِ جواب در ۷.۶ تعینی و جمله‌یِ دوم تصادفی است. اگر متوسطِ دو طرف را محاسبه کنیم

$$\begin{aligned}\langle v(t)\rangle =&\langle v(0)\rangle \mathrm{e}^{-\gamma t} + \int_0^t \mathrm{d}t' \, \frac{\langle F_s(t')\rangle}{m} \, \mathrm{e}^{\gamma(t'-t)} \\ =&v(0)\mathrm{e}^{-\gamma t}.\end{aligned} \tag{۸.۶}$$

در این‌جا از این‌که متوسطِ یک کمیت تعینی برابر با خودش است و همین‌طور از ۲.۶ استفاده کرده‌ایم. بخشی از سرعتِ ذره که همان مقدارِ متوسطش است تعینی، و بخشی دیگر از آن کمیتی تصادفی است. همان‌طور که انتظار داریم سرعت در زمانِ $t$ به نیروی تصادفی در زمان‌های $t'$ کوچک‌تر از $t$ بستگی دارد و مستقل از اندازه‌یِ نیرو در زمان‌هایِ بعد از $t$ است. با مجذور کردنِ رابطه‌یِ ۷.۶ می‌رسیم به

$$\begin{aligned}v^2(t) =&v^2(0)\mathrm{e}^{-2\gamma t} + \int_0^t \mathrm{d}t' \int_0^t \mathrm{d}t'' \, \frac{F_s(t')F_s(t'')}{m^2} \, \mathrm{e}^{\gamma(t'+t''-2t)} \\ &+ 2v(0) \int_0^t \mathrm{d}t' \, \frac{F_s(t')}{m} \, \mathrm{e}^{\gamma(t'-2t)}.\end{aligned} \tag{۹.۶}$$

با متوسط‌گیری از دو طرفِ این معادله نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\langle v^2(t)\rangle =&v^2(0)\mathrm{e}^{-2\gamma t} + \int_0^t \mathrm{d}t' \int_0^t \mathrm{d}t'' \frac{\langle F_s(t')F_s(t'')\rangle}{m^2} \mathrm{e}^{\gamma(t'+t''-2t)} \\ =&v^2(0)\mathrm{e}^{-2\gamma t} + \int_0^t \mathrm{d}t' \int_0^t \mathrm{d}t'' \frac{\Gamma\delta(t'-t'')}{m^2} \mathrm{e}^{\gamma(t'+t''-2t)} \\ =&v^2(0)\mathrm{e}^{-2\gamma t} + \frac{\Gamma}{m^2} \int_0^t \mathrm{d}t' \mathrm{e}^{2\gamma(t'-t)} \\ =&v^2(0)\mathrm{e}^{-2\gamma t} + \frac{\Gamma}{2\gamma m^2}(1-\mathrm{e}^{-2\gamma t}).\end{aligned} \tag{۱۰.۶}$$

از این‌جا

$$\langle v^2(t)\rangle - \langle v(t)\rangle^2 = \frac{\Gamma}{2\gamma m^2}(1-\mathrm{e}^{-2\gamma t}) \tag{۱۱.۶}$$

انرژیِ جنبشیِ متوسطِ ذره در زمانِ $t$

$$\langle K\rangle = K_0\mathrm{e}^{-2\gamma t} + \frac{\Gamma}{4\gamma m}(1-\mathrm{e}^{-2\gamma t}) \tag{۱۲.۶}$$

در این‌جا از ۳.۶ استفاده کرده‌ایم. در زمان‌هایِ بلند، $t \gg \dfrac{1}{\gamma}$، جمله‌یِ اول که مربوط به انرژیِ جنبشیِ اولیه است، صفر می‌شود و بنا بر این اهمیتی ندارد و انرژیِ جنبشیِ متوسط عبارت است از

$$\lim_{t\to\infty}\langle K\rangle = \frac{\Gamma}{4\gamma m}. \tag{۱۳.۶}$$

در این مرحله با استفاده از قضیه‌یِ هم‌پارش، $\langle K\rangle = \dfrac{1}{2}k_BT$، ضریبِ $\Gamma$ تعیین می‌شود

$$\Gamma = 2\gamma m k_B T. \tag{۱۴.۶}$$

همان‌طور که گفتیم $\Gamma$ معیاری از قدرتِ نیرویِ تصادفی است و $\Gamma$ یِ بزرگ معادلِ دمایِ زیاد است. در زمان‌هایِ بلند

$$\lim_{t\to\infty}\langle v(t)\rangle = 0, \tag{۱۵.۶}$$

$$\lim_{t\to\infty}[\langle v^2(t)\rangle - \langle v(t)\rangle^2] = \frac{k_BT}{m}. \tag{۱۶.۶}$$

در ابتدایِ حرکت یعنی در زمان‌هایِ کوچک با استفاده از $\mathrm{e}^{-2\gamma t} \approx 1-2\gamma t$ می‌رسیم به

$$\lim_{t\to 0}\langle v(t)\rangle = v_0, \tag{۱۷.۶}$$

$$\lim_{t\to 0}[\langle v^2(t)\rangle - \langle v(t)\rangle^2] = \frac{\Gamma}{m^2}\,t = \frac{2\gamma k_BT}{m}\,t \tag{۱۸.۶}$$

هم‌بستگیِ سرعت در دو زمانِ مختلف را هم می‌توانیم به دست آوریم

$$\langle v(t_1)v(t_2)\rangle = v^2(0)\mathrm{e}^{-\gamma(t_1+t_2)} + \int_0^{t_1}\mathrm{d}t'\int_0^{t_2}\mathrm{d}t''\frac{\langle F_s(t')F_s(t'')\rangle}{m^2}\mathrm{e}^{\gamma(t'+t''-t_1-t_2)}$$

$$=(v^2(0)-\frac{\Gamma}{2\gamma m^2})\mathrm{e}^{-\gamma(t_1+t_2)}+\frac{\Gamma}{2\gamma m^2}\mathrm{e}^{-\gamma(t_2-t_1)}. \tag{۱۹.۶}$$

حالا ببینیم در موردِ مکان چه می‌توانیم بگوییم. با انتگرال‌گیری‌یِ مستقیم از سرعت نتیجه می‌شود

$$x(t)=x(0)+\int_0^t \mathrm{d}t'\, v(t'), \tag{۲۰.۶}$$

از همین‌جا با متوسط‌گیری از دو طرف می‌توانیم $\langle x(t)\rangle$ را به دست آوریم.

$$\begin{aligned}\langle x(t)\rangle =&x(0)+\int_0^t \mathrm{d}t'\,\langle v(t')\rangle\\ =&x(0)+\int_0^t \mathrm{d}t'\, v(0)\mathrm{e}^{-\gamma t'}\\ =&\ x(0)+\frac{v(0)}{\gamma}(1-\mathrm{e}^{-\gamma t}).\end{aligned} \tag{۲۱.۶}$$

همین نتیجه را با استفاده از ۷.۶ و جاگذاری‌یِ تابعِ تصادفی‌یِ سرعت هم می‌توانیم به دست آوریم.

$$\begin{aligned}x(t)=&x(0)+\int_0^t \mathrm{d}t'\, v(0)\mathrm{e}^{-\gamma t'}+\int_0^t \mathrm{d}t'\int_0^{t'}\mathrm{d}t''\,\frac{F_s(t'')}{m}\,\mathrm{e}^{\gamma(t''-t')},\\ =&x(0)+\frac{v(0)}{\gamma}(1-\mathrm{e}^{-\gamma t})+\int_0^t \mathrm{d}t''\frac{F_s(t'')}{\gamma m}\,(1-\mathrm{e}^{\gamma(t''-t)}).\end{aligned} \tag{۲۲.۶}$$

در رابطه‌یِ آخر ترتیبِ انتگرال‌گیری روی $t'$ و $t''$ را جابه‌جا کرده‌ایم.

$$\int_0^t \mathrm{d}t'\int_0^{t'}\mathrm{d}t''A(t,t',t'')=\int_0^t \mathrm{d}t''\int_{t''}^t \mathrm{d}t' A(t,t',t''). \tag{۲۳.۶}$$

$\langle x^2(t)\rangle$ را نیز به همین طریق می‌توانیم دست آوریم.

$$\langle x^2(t)\rangle =x^2(0)+2x(0)\int_0^t \mathrm{d}t'\,\langle v(t')\rangle+\int_0^t \mathrm{d}t_1'\int_0^t \mathrm{d}t_2'\,\langle v(t_1')v(t_2')\rangle. \tag{۲۴.۶}$$

با جمع‌وجور کردنِ این‌ها نتیجه می‌شود

$$\langle x^2(t)\rangle-\langle x(t)\rangle^2=\frac{\Gamma}{m^2\gamma^3}\left[\gamma t-2(1-\mathrm{e}^{-\gamma t})+\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2\gamma t})\right] \tag{۲۵.۶}$$

اگر ذره در ابتدا در مبدا و ساکن باشد

$$x(0) = 0, \qquad v(0) = 0, \tag{۲۶.۶}$$

است. در این‌صورت در زمان‌های بلند

$$\lim_{t\to\infty} \langle x(t)\rangle = 0, \tag{۲۷.۶}$$

$$\lim_{t\to\infty} [\langle x^2(t)\rangle - \langle x(t)\rangle^2] = \frac{\Gamma}{m^2\gamma^2} t. \tag{۲۸.۶}$$

یعنی پس از زمانِ طولانی تابعیت واریانس بر حسبِ زمان به صورتِ $t^{1/2}$ است. در ابتدای حرکت یعنی در زمان‌های کوچک با استفاده از

$$\mathrm{e}^{-\alpha t} \approx 1 - \alpha t + \frac{\alpha^2}{2} t^2 - \frac{\alpha^3}{3} t^3, \tag{۲۹.۶}$$

می‌رسیم به

$$\lim_{t\to 0} \langle x(t)\rangle = 0, \tag{۳۰.۶}$$

$$\lim_{t\to 0} [\langle x^2(t)\rangle - \langle x(t)\rangle^2] = \frac{\Gamma t^3}{3m^2}. \tag{۳۱.۶}$$

پس در ابتدای حرکت تابعیت واریانس بر حسبِ زمان به صورتِ $t^{3/2}$ ، پس از زمانِ طولانی متناسب با $t$ است. در زمان‌های میانی هم رفتارِ آن پیچیده و شاملِ تابعِ نمایی است.

## ۳.۶ نوسان‌گرِ هم‌آهنگ

معادله‌ی لانژون برای نوسان‌گرِ هم‌آهنگ به صورتِ زیر است

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\gamma m\boldsymbol{v} - K\boldsymbol{r} + \boldsymbol{F}_s(t) \tag{۳۲.۶}$$

در حالتِ ساده‌ترِ یک بعدی

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\gamma v - kx + \zeta(t), \tag{۳۳.۶}$$

که $k := \dfrac{K}{m}$ است.

## ۴.۶ معادله‌یِ فوکر_ پلانک

## ۵.۶ معادله‌یِ کرامرز_ مویال

## مسائل

۱.۶ قطره‌یِ ریزی به جرمِ $m$ تحتِ نیرویِ گرانش از ارتفاعِ $\boldsymbol{r}_0 = h\boldsymbol{k}$ و از حالتِ سکون یعنی $\boldsymbol{v}_0 = 0$ رها می‌شود. فرض کنید این قطره در حینِ سقوط تحتِ تاثیرِ نیرویِ مقاومتِ هوا که متناسب با سرعت است، $-\gamma m\boldsymbol{v}$ و یک نیرویِ تصادفی که ناشی از برخوردِ مولکول‌هایِ هوا است، $\boldsymbol{F}_s(t)$ قرار دارد. این قطره حینِ سقوط ممکن است به خاطرِ نیرویِ تصادفی به جهت‌هایِ مختلفِ هم منحرف شود. قانونِ نیون برایِ حرکتِ این قطره

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\gamma m\boldsymbol{v} - mg\boldsymbol{k} + \boldsymbol{F}_s(t) \qquad (۳۴.۶)$$

است. نیرویِ تصادفیِ $\boldsymbol{F}_s(t)$ برداری است با این خواص

$$\langle F_{s,i}(t)\rangle = 0,$$
$$\langle F_{s,i}(t)F_{s,j}(t')\rangle = \delta_{ij}\Gamma\delta(t-t'),$$

که $F_{s,i}(t)$ مولفه‌یِ $i$ اُم نیرویِ تصادفی است. بنا بر این مولفه‌هایِ مختلفِ این نیرو ناهم‌بسته هستند. معادله‌یِ نیوتن برایِ حرکتِ این ذره به سه معادله‌یِ مستقل تبدیل می‌شود.

الف_ بردارِ سرعت و مکان را در زمانِ $t$ به دست آورید.

ب_ سرعتِ متوسط $\langle\boldsymbol{v}(t)\rangle$ و مکانِ متوسطِ قطره $\langle\boldsymbol{r}(t)\rangle$ در زمانِ $t$ چه‌قدر است؟

ج_ در دو تقریبِ زمان‌هایِ ابتدایِ حرکت $t \ll \gamma^{-1}$ و پس از مدتِ طولانی $t \gg \gamma^{-1}$ سرعتِ متوسط $\langle\boldsymbol{v}(t)\rangle$ و مکانِ متوسطِ قطره $\langle\boldsymbol{r}(t)\rangle$ را به دست آورید.

د– فرض کنید مدتی که طول می‌کشد تا قطره به زمین برسد طولانی باشد. در زمانِ $T$، که $T \gg \gamma^{-1}$ است، ارتفاعِ متوسطِ قطره $\langle z(T)\rangle = 0$ می‌شود. در این تقریب مقدارِ $T$ را بر جسبِ $h, \gamma$ و $g$ به دست آورید. در این تقریب

$$(\Delta x)^2 := \langle x^2(T)\rangle - \langle x(T)\rangle^2,$$
$$(\Delta y)^2 := \langle y^2(T)\rangle - \langle y(T)\rangle^2,$$

را به دست آورید.

ه– اگر تعدادی قطره مطابقِ این مدل از ارتفاعِ $h$ بچکند، وقتی که به زمین می‌رسند، شعاعِ ناحیه‌ای که در صفحه افق را تَر می‌کنند،

$$R = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

است. $R$ را بر حسبِ $\Gamma, \gamma, T, m, g$ و $h$ به دست آورید.

۲.۶ معادله‌ی لانژون برایِ نوسانگری در حضور نیروی مقاومت $-\gamma m v$ و یک نیرویِ تصادفیِ $F$ با خاصیتِ

$$\langle F_s(t)\rangle = 0,$$
$$\langle F_s(t)F_s(t')\rangle = \Gamma\delta(t-t')$$

عبارت است از

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -m\omega^2 x - \gamma m v + F_s(t).$$

الف– با فرضِ $x(0) = 0$ و $v(0) = 0$ کمیت‌هایِ زیر را به دست آورید

$$\langle x(t)^2\rangle, \qquad \langle v(t)^2\rangle$$

ب– کمیت‌هایِ بندِ قبل را پس از زمانِ طولانی به دست آورید.

ج– پس از زمانِ طولانی انرژیِ جنبشی و انرژیِ پتانسیلِ متوسط (قضیه هم‌پارش) را به دست آورید.

# منابع

# SOME PROBLEMS IN MECHANICS

By:

**AMIR AGHAMOHAMMADI**

UNIVERSITY OF ALZAHRA

**UNIVERSITY OF ALZAHRA PRESS**

2020

https://staff.alzahra.ac.ir/aghamohammadi

https://www.youtube.com/channel/UCFGDlcj-NiSA_o4AeVtfkSg